Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Я. С. УФЛЯНД

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ИЗГИБА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛИТЫ

(Представлено академиком А. Ф. Иоффе 27 III 1950)

Рассмотрим упругую тонкую плиту в виде прямоугольника (рис. 1), изгибаемую произвольной поперечной нагрузкой $q(x, y)$, причем три стороны будем считать закрепленными, а одну — свободно опертой *.

Поставленная задача сводится к решению бигармонического уравнения **

$$\Delta^2 u = q \tag{1}$$

при граничных условиях

$$u \,|_{x=0} = u \,|_{x=a} = 0, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = 0, \tag{3}$$

$$u \Big|_{y=0} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=0} = u \Big|_{y=b} = \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = 0. \tag{4}$$

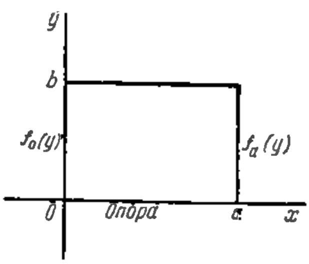

Рис. 1

Применяя метод, предложенный Г. А. Гринбергом [1], точное решение задачи можно свести к интегральному уравнению, допускающему весьма эффективные приближения.

Полагая

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(y) \cos \alpha_n x, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \tag{5}$$

сразу удовлетворяем условиям (3).

Распределим по кромкам $x = 0$ и $x = a$ нагрузки $f_0(y)$ и $f_a(y)$ (рис. 1), подлежащие впоследствии определению из условий (2). Тогда, подставляя (5) в (1), разлагая внешнюю нагрузку в соответствующий

* Насколько нам известно, такая задача в литературе не рассматривалась.

** $u = Dw$; w — прогиб плиты; $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость.

тригонометрический ряд и интегрируя обыкновенное уравнение для функций $u_n(y)$, получим:

$$u_n(y) = A_n \operatorname{ch} \alpha_n y + B_n \operatorname{sh} \alpha_n y + C_n \alpha_n y \operatorname{ch} \alpha_n y + D_n \alpha_n y \operatorname{sh} \alpha_n y +$$

$$+ \frac{1}{2\alpha_n^3} \int_0^y p_n(t) K_n(y, t)\, dt,$$

$$K_n(y, t) = \alpha_n (y - t) \operatorname{ch} \alpha_n (y - t) - \operatorname{sh} \alpha_n (y - t)\ *, \tag{6}$$

$$p_n(t) = \frac{2}{a} \left[f_0(t) + (-1)^n f_a(t) + \int_0^a q_n(x, t) \cos \alpha_n x\, dx \right].$$

Постоянные A_n, B_n, C_n и D_n должны быть определены из граничных условий (4), после чего величина $u(x, y)$, даваемая формулой (5), будет содержать под знаками интегралов две неизвестные функции: $f_0(y)$ и $f_a(y)$. Чтобы удовлетворить оставшимся двум условиям (2), надо приравнять нулю значения $u(0, y)$ и $u(a, y)$, что приводит к системе двух интегральных уравнений. Эту систему без труда можно превратить в два интегральные уравнения, содержащие две неизвестные функции порознь.

Если нагрузка симметрична относительно линии $x = a/2$, то $f_0(y) = f_a(y) = f(y)$, и для функции $f(y)$ имеем такое интегральное уравнение:

$$\int_0^b f(t) K(y, t)\, dt + \int_0^y f(t) M(y, t)\, dt = F(0, y), \tag{7}$$

где

$$K(y, t) = \sum_n^{0,\,2,\,4,\dots} \frac{\Phi_n(y, t)}{\alpha_n}, \qquad M(y, t) = \sum_n^{0,\,2,\,4,\dots} \frac{K_n(y, t)}{\alpha_n^3},$$

$$\Phi_n(y, t) = \varphi_n(y) K_n(b, t) + \psi_n(y) K_n'(b, t),$$

$$\varphi_n(y) = \frac{\alpha_n y \operatorname{ch} \alpha_n y \operatorname{ch} n\xi - \operatorname{sh} \alpha_n y (n\xi \operatorname{sh} n\xi + \operatorname{ch} n\xi)}{\operatorname{ch} n\xi \operatorname{sh} n\xi - n\xi},$$

$$\psi_n(y) = \frac{\operatorname{sh} \alpha_n y \cdot n\xi \operatorname{ch} n\xi - \alpha_n y \operatorname{ch} \alpha_n y \operatorname{sh} n\xi}{\operatorname{ch} n\xi \operatorname{sh} n\xi - n\xi} \quad \left(\xi = \pi \frac{b}{a} \right), \tag{8}$$

$$K_n'(y, t) = \alpha_n (y - t) \operatorname{sh} \alpha_n (y - t),$$

$$F(x, y) = -\frac{a}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(y)}{\alpha_n^3} \cos \alpha_n x,$$

$$F_n(y) = \varphi_n(y) \int_0^b q_n(t) K_n(b, t)\, dt + \psi_n(y) \int_0^b q_n(t) K_n'(b, t)\, dt +$$

$$+ \int_0^y q_n(t) K_n(y, t)\, dt.$$

---

* При $n = 0$ $K_0(y, t)$ надо умножать на $^1/_2$.

Приближенное решение уравнения (7) может быть получено путем закрепления отдельных точек на кромках $x = 0$ и $x = a$, причем нагрузка $f(y)$ превращается в ряд сил, сосредоточенных в этих точках. Величины этих сил, через которые выражается прогиб плиты, находятся решением системы линейных алгебраических уравнений.

Приводим формулы для максимальных значений изгибающего момента и перерезывающей силы, достигаемых в точке $x = a/2$, $y = b$, причем в первом приближении закреплялась одна точка $x = 0$, $y = b/2$ *:

$$-\frac{a}{2} M_{\max} = \frac{16}{b^2} F\left(0, \frac{b}{2}\right) \frac{{}^3/_{32} + \sigma}{{}^7/_{96} + S} - \left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=a/2 \\ y=b}},$$

$$-\frac{a}{2} N_{\max} = \frac{8}{b^3} F\left(0, \frac{b}{2}\right) \frac{{}^{11}/_{16} + \tau}{{}^7/_{96} + S} - \left.\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}\right|_{\substack{x=a/2 \\ y=b}}, \tag{9}$$

где

$$\sigma = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{sh}^3 n\xi}{\operatorname{sh} 4n\xi - 4n\xi},$$

$$S = \frac{1}{2\xi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n\xi)^2 (3 - \operatorname{ch} n\xi) + 2n\xi (1 - \operatorname{sh} 2n\xi) - 2e^{-n\xi} \operatorname{sh} n\xi \operatorname{ch} 2n\xi}{(n\xi)^3 (\operatorname{sh} 4n\xi - 4n\xi)}, \tag{10}$$

$$\tau = 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{ch} 2n\xi \operatorname{sh} n\xi + n\xi \operatorname{ch} n\xi (\operatorname{ch} 2n\xi - 2)}{\operatorname{sh} 4n\xi - 4n\xi}.$$

Суммы σ, S и τ могут быть табулированы для различных значений отношения b/a, независимо от типа внешней нагрузки, причем сходимость рядов очень хорошая.

В табл. 1 для квадратной плиты приведены значения коэффициентов α и β при трех типах внешней нагрузки: 1) равномерная нагрузка q: $\alpha = -M_{\max}/qa^2$, $\beta = -N_{\max}/qa$; 2) нагрузка, равномерно распределенная по линии $y = b/2$, с плотностью p: $\alpha = -M_{\max}/pa$, $\beta = -N_{\max}/p$; 3) сосредоточенная сила P в центре плиты: $\alpha = -M_{\max}/P$, $\beta = -N_{\max}/(P/a)$.

Таблица 1

	α	β
1	0,0582	0,458
2	0,0705	0,396
3	0,138	0,830

Ленинградский физико-технический институт Академии наук СССР

Поступило 22 III 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. А. Гринберг и Я. С. Уфлянд, Прикладн. матем. и мех., **13**, № 4, 413 (1949).

* По симметрии закрепится также точка $x = a$, $y = b/2$.