Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Я. М. ПАРХОМОВСКИЙ

ОСОБЕННОСТИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ С ЗАТУХАНИЕМ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 15 I 1950)

В заметке на примере рассмотрения вынужденных крутильных колебаний устанавливаются некоторые общие зависимости колебаний распределенных систем, обладающих внутренним трением.

Пусть консольная балка постоянного сечения, жесткость на кручение которой C, а погонный массовый момент инерции I, находится под воздействием сосредоточенной возбуждающей колебания пары $M_0 \sin \omega t$, приложенной в сечении $x = l_0$, длина балки $x = L$.

Поставим себе задачей найти установившиеся вынужденные колебания балки.

Примем, что зависимость между крутящим моментом $M_{кр}$, круткой $\partial\varphi / \partial x$ и моментом сил внутреннего трения дается формулой

$$M_{кр} = C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\alpha}{\omega}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\, \partial t}\right), \tag{1}$$

где φ — угол кручения, ω — круговая частота колебаний, α — коэффициент демпфирования, x — абсцисса, t — время. Такая зависимость довольно хорошо согласуется с опытом.

Поставленная задача сводится к решению уравнения:

$$C\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\alpha}{\omega}\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2 \partial t}\right) - I\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \tag{2}$$

при условиях:

$$\varphi = 0 \quad \text{при } x = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = L; \tag{3}$$

при $x = l_0$:

$$\varphi_- = \varphi_+, \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\alpha}{\omega}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\, \partial t}\right)_- - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\alpha}{\omega}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\, \partial t}\right)_+ = \frac{M_0}{C}\sin\omega t. \tag{4}$$

Знаком $+$ обозначено значение величины справа, знаком $-$ слева от сечения $x = l_0$.

Решение задачи дается выражением:

$$\varphi = X(\xi)\, e^{-i\omega t} + \overline{X}(\xi)\, e^{i\omega t} = 2\left[U(\xi)\cos\omega t + V(\xi)\sin\omega t\right] =$$

$$= A(\xi)\sin(\omega t - \psi). \tag{5}$$

Здесь $\overline{X}(\xi)$ — функция, сопряженная с $X(\xi)$, $X(\xi)=U(\xi)+iV(\xi)$, $\operatorname{tg}\psi = -\frac{U}{V}$, $\xi=\frac{x}{L}$, $l=\frac{l_0}{L}$, $\Omega^2=\frac{IL^2}{C}\omega^2$.

$$X(\xi)=\frac{im_0\lambda\cos\lambda(1-l)}{2\Omega^2\cos\lambda}\sin\lambda\xi, \quad 0\leqslant\xi\leqslant l;$$

$$X(\xi)=\frac{im_0\lambda\sin\lambda l}{2\Omega^2\cos\lambda}\cos\lambda(1-\xi), \quad l\leqslant\xi\leqslant 1, \tag{6}$$

где $\lambda=p+iq$, $p=\Omega\sqrt{\frac{\sqrt{1+\alpha^2}+1}{2(1+\alpha^2)}}$, $q=\Omega\sqrt{\frac{\sqrt{1+\alpha^2}-1}{2(1+\alpha^2)}}$.

Из выражений (5) и (6) следует, что квадрат амплитуды колебаний дается формулой:

$$A^2(\xi)=\frac{m_0^2}{2\Omega^2\sqrt{1+\alpha^2}}\frac{\operatorname{ch}2q\xi-\cos 2p\xi}{\operatorname{ch}2q+\cos 2p}[\cos 2p(1-l)+\operatorname{ch}2q(1-l)], \quad 0\leqslant\xi\leqslant l;$$

$$A^2(\xi)=\frac{m_0^2}{2\Omega^2\sqrt{1+\alpha^2}}\frac{\operatorname{ch}2ql-\cos 2pl}{\operatorname{ch}2q+\cos 2p}[\cos 2p(1-\xi)+\operatorname{ch}2q(1-\xi)], \quad l\leqslant\xi\leqslant 1. \tag{7}$$

Резонансными частотами, как известно, называются те значения частоты возбуждающей колебания пары Ω, при которых кривая $A^2(\Omega)$ принимает максимальные значения. Рассматривая выражения (7), можно убедиться, что существует такое значение $\Omega=\Omega^*$, при котором кривая $A^2(\Omega)$ становится монотонно убывающей. Отсюда следует, что число резонансных частот распределенной системы, обладающей внутренним трением, конечно.

Если обозначить через $\Omega_p^{(1)}, \Omega_p^{(2)}, \ldots, \Omega_p^{(n)}$ резонансные частоты, расположенные в порядке возрастания, а через $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — соответствующие им амплитуды вынужденных колебаний, то можно показать, что, по крайней мере, начиная с некоторой частоты $\Omega_p^{(k)}$, имеет место соотношение:

$$A_k > A_{k+1} > \ldots > A_n.$$

Резонансные частоты являются корнями уравнения $dA^2/d\Omega=0$*. Это уравнение можно представить в следующем виде:

$$\frac{1}{\Omega}+\frac{q'\operatorname{sh}2q-p'\sin 2p}{\operatorname{ch}2q+\cos 2p}-\xi\frac{q'\operatorname{sh}2q\xi+p'\sin 2p\xi}{\operatorname{ch}2q\xi-\cos 2p\xi}-$$
$$-(1-l)\frac{q'\operatorname{sh}2q(1-l)-p'\sin 2p(1-l)}{\operatorname{ch}2q(1-l)+\cos 2p(1-l)}=0 \quad \text{при } 0\leqslant\xi\leqslant l;$$

$$\frac{1}{\Omega}+\frac{q'\operatorname{sh}2q-p'\sin 2p}{\operatorname{ch}2q+\cos 2p}-l\frac{q'\operatorname{sh}2ql+p'\sin 2pl}{\operatorname{ch}2ql-\cos 2pl}-$$
$$-(1-\xi)\frac{q'\operatorname{sh}2q(1-\xi)-p'\sin 2p(1-\xi)}{\operatorname{ch}2q(1-\xi)+\cos 2p(1-\xi)}=0 \quad \text{при } l\leqslant\xi\leqslant 1. \tag{8}$$

Здесь $q'=dq/d\Omega$, $p'=dp/d\Omega$.

Из вида уравнений (8) следуют два факта: 1) при фиксированном месте наблюдения (т. е. при наблюдении за колебаниями определенного сечения балки) резонансная частота зависит от места приложения

* Точнее, теми корнями уравнения $dA^2/d\Omega=0$, для которых $d^2A^2/d\Omega^2<0$.

возбуждающей колебания пары; 2) при фиксированном положении вибратора резонансная частота зависит от выбора места наблюдения.

Таким образом, в отличие от систем без затухания, где резонансная частота — характеристика „интегральная", в системах с затуханием резонансная частота является характеристикой „дифференциальной". Следует заметить, что зависимость низшей резонансной частоты от выбора места наблюдения $\xi_н$ и положения вибратора l весьма слаба и при малых значениях коэффициента демпфирования α $\Omega_p^{(1)}(l, \xi_н)$ практически — величина постоянная.

В то время как для систем без затухания при высших тонах колебаний характерно наличие изолированных сечений, помещая в которые вибратор нельзя вызвать резонанса соответствующей частоты, для систем с затуханием при высших тонах существуют уже целые интервалы сечений, помещая в которые вибратор нельзя вызвать резонанса соответствующей частоты.

Рассматривая уравнения (8), можно установить, что резонансные частоты обладают свойством взаимности. Именно: помещая вибратор в сечении $\xi = l$ и наблюдая за колебаниями сечения $\xi = \xi_н$, мы получим то же значение резонансной частоты, что и при наблюдении за сечением $\xi = l$, если вибратор будет помещен в сечении $\xi = \xi_н$.

Форма резонансных колебаний, как это следует из выражения (6), также зависит от места приложения вибратора. Далее, одной и той же частоте могут соответствовать две (различные) формы колебаний. Приведем пример.

В силу свойства взаимности резонансных частот она будет одной и той же как если поместить вибратор в сечении $\xi = l$ и наблюдать за сечением $\xi = \xi_н$, так и при наблюдении за сечением $\xi = l$, если вибратор расположить в сечении $\xi = \xi_н$. Между тем, из формулы (6) следует, что формы колебаний в первом и во втором случаях будут различными.

В системах без затухания формы собственных колебаний при высших тонах колебаний имеют так называемые узловые точки — сечения балки, остающиеся неподвижными при колебаниях. В системах с затуханием, как это следует из (7), $A^2(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$ и, следовательно, не существует сечений, остающихся неподвижными при колебаниях. Узловые точки при колебаниях перемещаются.

Подобно тому, как резонансная кривая $A^2(\Omega)$, начиная с некоторого значения Ω, становится монотонно убывающей, так и кривая $\psi(\Omega)$, характеризующая сдвиг фаз между возмущающей парой и крутильными деформациями, с ростом Ω после некоторого значения его стремится к величине

$$\psi_0 = \operatorname{arc\,tg}\left(-\sqrt{\frac{\sqrt{1+\alpha^2}+1}{\sqrt{1+\alpha^2}-1}}\right).$$

При весьма малых величинах коэффициента демпфирования α низшая резонансная частота отличается от частоты собственных колебаний на величину второго порядка малости по α^2. При малой величине α в форме резонансных колебаний преобладает та ее составляющая $U(\xi)$, которая сдвинута по фазе на $\pi/2$ по отношению к возмущению. При этом составляющая $U(\xi)$ совпадает с формой собственных колебаний системы без затухания.

Все полученные качественные выводы остаются в силе и в том случае, когда закон для сил внутреннего трения задан в виде

$$M_{кр} = C\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial t}\right).$$

Поступило
14 I 1950