Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 4

МАТЕМАТИКА

Г. Е. ШИЛОВ

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ И. М. ГЕЛЬФАНДА И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 1 IV 1950)

В 1941 г. И. М. Гельфанд опубликовал следующую теорему ([1], стр. 49):

Теорема 1. *Пусть R — нормированное кольцо с единицей e, $y \in R$ — обобщенный нильстепенный элемент и $x = e - y$.*

Тогда, если $\alpha_n = \|x^n\| = O(1)$ при $n \to \pm\infty$, то $y = 0$.

1. В 1944 г. Э. Хилле [2] предложил следующее обобщение этой теоремы:

Утверждение теоремы 1 справедливо в предположении $\alpha_n = o(1)$.

В 1948 г. Стон [3], усовершенствовав метод Хилле, повторил и несколько обобщил его результат; теорема, доказанная Стоном и именуемая им „теоремой Гельфанда и Хилле", получила следующую формулировку:

Для того чтобы имело место равенство $y^{N+1} = 0$ (соответственно $y^N = 0$), необходимо и достаточно выполнение условия $\alpha_n = O(|n|^N)$ (соответственно $\alpha_n = o(|n|^N)$) при $n \to \pm\infty$.

Я хотел бы обратить внимание на то обстоятельство, что как теорема Хилле, так и ее обобщение Стоном содержатся в другой теореме И. М. Гельфанда, опубликованной им также в 1941 г. в том же журнале ([1], стр. 46):

Теорема 2. *Пусть R — нормированное кольцо с образующими x и x^{-1}. Положим $\alpha_n = \|x^n\|$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; допустим, что выполнены условия*

$$\lim_{r \to 1} (1-r)^k \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n = 0,$$

$$\lim_{r \to 1} (1-r)^k \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{-n} r^n = 0. \tag{1}$$

Тогда в каждом максимальном идеале $M_0 \subset R$ имеется не более чем $k-1$ различных примарных идеалов $I_1, I_2, \ldots, I_{k-1}$; при этом идеал I_j порождается элементом $(x - x(M_0)e)^j$ $(j = 1, 2, \ldots, k-1)$; элемент $(x - x(M_0)e)^{k-1}$ принадлежит к любому примарному идеалу $I \subset R$.*

* Последнее утверждение, правда, не включено И. М. Гельфандом в формулировку теоремы; но в его статье доказательство этого утверждения является основным звеном доказательства всей теоремы.

Покажем, как из теоремы 2 получается, например, теорема Стона. Пусть $y \in R$ — обобщенный нильстепенный элемент и для $x = e - y$ выполнены условия $\alpha_n = \|x^n\| = O(|n|^N)$ при $n \to \pm\infty$. Рассмотрим в кольце R подкольцо, порожденное элементами x и x^{-1}; оно обладает единственным максимальным идеалом M_0, причем $x(M_0) = 1$. Нулевой идеал в этом кольце примарен. Легко проверить, что из условия $\alpha_n = o(|n|^N)$ вытекают предельные соотношения (1) при $k = N + 2$. В силу теоремы 2 $(x - e)^{N+1} = y^{N+1} = 0$. Если допустить, что $\alpha^n = o(|n|^N)$, то аналогично доказывается, что $y^N = 0$. Достаточность условий теоремы Стона, таким образом, доказана: необходимость этих условий получается тривиальным образом из разложения $(e - y)^n$ по биному Ньютона.

В работе И. М. Гельфанда теорема 2 получена как один из результатов общей теории. Я привожу прямое ее доказательство, не использующее, впрочем, никаких новых идей.

Из условий (1) легко выводится, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_{-n}} = 1$ и, следовательно, $|x(M)| = 1$. Поэтому, заменяя в случае надобности x на $xe^{i\varphi}$ с надлежаще подобранным φ, можно считать, что $x(M_0) = 1$.

Обозначим через X образ элемента x в кольце вычетов R/I, где $I \subset M_0$ — любой примарный идеал. Тогда $\|X^n\| \leqslant \alpha_n$. Функция $(e - \lambda X)^{-1}$ имеет единственную особенность при $\lambda = 1$ и удовлетворяет следующим предельным соотношениям:

при $|\lambda| = r < 1$:

$$\|(e - \lambda X)^{-1}\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda^n| \, \|X^n\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n = o\left(\frac{1}{(1-r)^k}\right) \quad (r \to 1); \tag{2а}$$

при $|\lambda| = \frac{1}{r}$, $r < 1$:

$$\|(e - \lambda X)^{-1}\| \leqslant |\lambda^{-1}| \, \|X^{-1}\| \sum_{0}^{\infty} |\lambda^{-n}| \, \|X^{-n}\| \leqslant C \sum_{0}^{\infty} \alpha_{-n} r^n =$$

$$= o\left(\frac{1}{(1-r)^k}\right) \quad (r \to 1). \tag{2б}$$

После преобразования независимого переменного $\lambda - 1 = \tau^{-1}$ функция $(e - \lambda X)^{-1}$ переходит в некоторую целую функцию $\Phi(\tau)$. Оценки (2), как легко проверить, преобразуются к виду

$$\|\Phi(\tau)\| = o\left(\frac{|\tau|^k}{\cos^k \varphi}\right),$$

где $\varphi = \arg \tau \neq \pi/2$. В силу теоремы Фрагмена — Линделефа в форме Неванлинна ([4]), использованной И. М. Гельфандом в аналогичном рассуждении (([1]), стр. 41), $\Phi(\tau)$ есть полином относительно τ степени ниже k (в статье ([3]) Стон дал простое и изящное доказательство этого предложения, заменяющее применение теоремы Фрагмена — Линделефа более элементарным рассуждением с интегралом Коши). Но, с другой стороны,

$$\Phi(\tau) = [e - (1 + \tau^{-1}) X]^{-1} = \tau [e - (\tau + 1) Y]^{-1} = \sum_{0}^{\infty} \tau (1 + \tau)^n Y^n =$$

$$= \sum_{0}^{\infty} (1 + \tau - 1)(1 + \tau)^n Y^n = \sum_{1}^{\infty} (1 + \tau)^n (Y^{n-1} - Y^n) - e,$$

где $Y = e - X$ есть образ в R/I элемента $y = e - x$. Следовательно, $Y^{k-1} - Y^k = 0$, $Y^{k-1}(e - Y) = 0$; умножая на $(e - Y)^{-1}$, получаем, что $Y^{k-1} = 0$, $y^{k-1} \in I$. Тем самым доказано последнее утверждение теоремы 2. Остальные утверждения этой теоремы получаются теперь без всякого труда.

Заметим, что нетрудно построить последовательность α_n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, удовлетворяющую соотношениям (1), например, для $k = 2$, и $\neq o(|n|^N)$, каково бы ни было N. Это показывает, что теорема И. М. Гельфанда по существу дает более широкие условия, чем теоремы Хилле и Стона.

2. В статье (2) Хилле ставит вопрос о доказательстве теоремы 1 в предположении ограниченности чисел α_n только при положительных значениях n. Следующий пример показывает, что ответ на этот вопрос должен быть отрицательным.

Пусть A — кольцо функций $f(\lambda)$, аналитических внутри круга $|\lambda| < 1$ и непрерывных в замкнутом круге $|\lambda| \leqslant 1$, с нормой

$$\|f\| = \max_{|\lambda|=1} |f(\lambda)|.$$

Мы покажем ниже, что примарный идеал I, порожденный функцией $(\lambda - 1)\exp\frac{1}{\lambda - 1} \in A$, не совпадает с соответствующим максимальным идеалом $M_0 = \{\lambda - 1\}$. Поэтому в кольце вычетов A/I образ функции $1 - \lambda \in A$ есть обобщенный нильстепенный элемент Y, отличный от нуля. Пусть $X = e - Y$; очевидно, что X есть образ функции $f(\lambda) \equiv \lambda$. Так как при гомоморфизме $A \to A/I$ нормы не увеличиваются, то для $n > 0$ $\|X^n\| \leqslant \|\lambda^n\| = 1$. Таким образом, в данном случае утверждение теоремы 1 не имеет места.

Остается показать, что $I \neq M_0$. Допуская противное, мы построим последовательность функций $f_n(\lambda) \in A$ таким образом, что

$$\max\left|(\lambda - 1) f_n(\lambda)\exp\frac{1}{\lambda - 1} - (\lambda - 1)\right| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

В частности, в каждой точке $\lambda \neq 1$

$$\lim f_n(\lambda) = \exp\frac{-1}{\lambda - 1}. \tag{3}$$

Для заданного $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < 1$ найдем номер N так, чтобы при $n > N$ имело место неравенство

$$\left|(\lambda - 1) f_n(\lambda)\exp\frac{1}{\lambda - 1} - (\lambda - 1)\right| < \varepsilon < 1$$

для всех $|\lambda| \leqslant 1$. Отсюда для $\lambda \neq 1$ последовательно получаем

$$\left|(\lambda - 1)\left[f_n(\lambda)\exp\frac{1}{\lambda - 1} - 1\right]\right| < \varepsilon,$$

$$\left|f_n(\lambda)\exp\frac{1}{\lambda - 1} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{|\lambda - 1|}, \quad \left|f_n(\lambda)\exp\frac{1}{\lambda - 1}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\lambda - 1|} + 1 \leqslant \frac{2 + \varepsilon}{|\lambda - 1|},$$

$$|\lambda - 1|\,|f_n(\lambda)| \leqslant \left|\exp\frac{-1}{\lambda - 1}\right|(2 + \varepsilon).$$

Если, в частности, $|\lambda| = 1$, то $\left|\exp\frac{-1}{\lambda - 1}\right| = \sqrt{e}$, поэтому для $|\lambda| = 1$, $\lambda \neq 1$, мы получаем

$$|(\lambda - 1) f_n(\lambda)| \leqslant \sqrt{e}(2 + \varepsilon) < 3\sqrt{e}.$$

Так как функция $f(\lambda)(\lambda - 1)$ непрерывна, то это неравенство справедливо и при $\lambda = 1$, а в силу принципа максимума — и при $|\lambda| < 1$. Поэтому для всех $|\lambda| \leqslant 1$

$$|f_n(\lambda)| \leqslant \frac{3\sqrt{e}}{|\lambda - 1|}, \quad \limsup_{n\to\infty} |f_n(\lambda)| \leqslant \frac{3\sqrt{e}}{|\lambda - 1|}.$$

Но это последнее неравенство противоречит предельному соотношению (3), что и завершает доказательство.

Можно показать далее, что: 1) примарные идеалы $I_\alpha = \left\{(\lambda - 1)\exp\frac{\alpha}{\lambda - 1}\right\}$ различны для различных $\alpha \geqslant 0$; 2) всякий примарный идеал, порожденный функцией $\varphi(\lambda) \in A$, равной нулю в единственной точке $\lambda = 1$, совпадает с одним из идеалов I_α.

Поступило
17 II 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Гельфанд и Г. Е. Шилов, Матем. сборн., 9 (51) : 1, 25(1941). [2] E. Hille, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 30, 58 (1944); Functional Analysis and Semi-Groups, Am. Math. Soc. Colloquium Publ., 31, N. Y., 1948, стр. 493. [3] M. Stone, Journ. Indian Math. Soc., N. S., 12, 1 (1948). [4] F. and R. Nevanlinna, Acta Soc. Scient. Fennicae, 50 : 5 (1922); Alfors, Trans. Am. Math. Soc., 41: 1 (1937).