Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 4

МАТЕМАТИКА

В. С. ФЕДОРОВ

МОНОГЕННАЯ ВЕКТОР-ФУНКЦИЯ

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 16 I 1950)

1. Пусть $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r})$ есть вектор-функция радиуса-вектора $\mathbf{r}$ переменной точки некоторой трехмерной области D, отнесенной к системе прямоугольных декартовых координат x, y, z. Пусть M и M' — две какие-нибудь точки области D; $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ — радиусы-векторы этих точек; $\Delta\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) - \mathbf{f}(\mathbf{r})$; $\mathbf{n}$ — орт, ортогональный к $\Delta\mathbf{r}$ и $\Delta\mathbf{f}$, причем, если $\Delta\mathbf{r} \times \Delta\mathbf{f} \neq 0$, то $\mathbf{n}$ — орт вектора $\Delta\mathbf{r} \times \Delta\mathbf{f}$; φ — угол между $\Delta\mathbf{r}$ и $\Delta\mathbf{f}$; φ отсчитываем от $\Delta\mathbf{r}$ к $\Delta\mathbf{f}$ в положительном направлении (если смотреть с конца орта $\mathbf{n}$); $R = |\Delta\mathbf{f}| / |\Delta\mathbf{r}|$ и $Re^{\varphi i} = P - iQ$ (i — известная мнимая единица; P, Q действительные). Если $\Delta\mathbf{f} = 0$, то считаем φ произвольным, $\mathbf{n}$ — любым ортом. Как легко видеть,

$$\Delta\mathbf{f} + i(\mathbf{n} \times \Delta\mathbf{f}) = (P + iQ)[\Delta\mathbf{r} + i(\mathbf{n} \times \Delta\mathbf{r})]$$

в том смысле, что

$$\Delta\mathbf{f} = P\Delta\mathbf{r} - Q(\mathbf{n} \times \Delta\mathbf{r}); \tag{1}$$

$$(\mathbf{n} \times \Delta\mathbf{f}) = P(\mathbf{n} \times \Delta\mathbf{r}) + Q\Delta\mathbf{r} \tag{2}$$

(уравнение (2) есть следствие уравнения (1), так как $\mathbf{n} \cdot \Delta\mathbf{r} = 0$, если $\Delta\mathbf{f}$ отлично от нуля, а в случае $\Delta\mathbf{f} = 0$ и, значит, $R = 0$ имеем равенства (1) и (2) при любом $\mathbf{n}$).

2. Полагая $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{m}\Delta s$, где $\Delta s = |\Delta\mathbf{r}|$, вектор $\mathbf{m}$ — орт вектора $\Delta\mathbf{r}$, и считая точку M фиксированной, а орт $\mathbf{m}$ постоянным, докажем, прежде всего, существование пределов

$$p = \lim_{\Delta s \to 0} P, \qquad q = \lim_{\Delta s \to 0} Q$$

в предположении, что существует (в данной точке M и для данного орта $\mathbf{m}$) производная

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\mathbf{f}}{\Delta s}.$$

В самом деле, из (1) находим

$$\mathbf{m} \cdot \frac{\Delta\mathbf{f}}{\Delta s} = P,$$

а также (так как $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$)

$$\mathbf{m} \times \frac{\Delta\mathbf{f}}{\Delta s} = -Q\mathbf{n}, \qquad \mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{m} \times \frac{\Delta\mathbf{f}}{\Delta s}\right) = -Q,$$

откуда

$$p = \mathbf{m} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial s}, \quad q = -\mathbf{n}_m \cdot \left(\mathbf{m} \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial s}\right), \quad \mathbf{m} \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial s} = -q\mathbf{n}_m, \tag{3}$$

где $\mathbf{n}_m$ есть орт векторного произведения $\mathbf{m} \times \partial \mathbf{f} / \partial s$, если таковое отлично от нуля, а в противном случае получим $q = 0$ и уравнения (3) будут иметь место при любом $\mathbf{n}_m$.

Из уравнения (1) следует:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial s} = p\mathbf{m} - q(\mathbf{n}_m \times \mathbf{m}). \tag{4}$$

Это равенство имеет место во всякой такой точке M, в которой существует производная $\partial \mathbf{f} / \partial s$, взятая по данному направлению $\mathbf{m}$.

3. Назовем вектор-функцию $\mathbf{f}$ моногенной в данной точке M области D, если: 1) $\mathbf{f}$ имеет в точке M производные $\partial \mathbf{f} / \partial s$ по всем направлениям (для всякого орта $\mathbf{m}$); 2) в формуле (4) p и q не зависят от $\mathbf{m}$ (иначе: не зависят от направления бесконечно малого приращения $\Delta \mathbf{r}$): p и q зависят только от координат точки M (для данной вектор-функции $\mathbf{f}$). Это определение есть естественное обобщение определения моногенной функции комплексного переменного $x + iy$.

Предполагая, что проекции $\mathbf{f}$ на оси координат имеют полные дифференциалы (как функции координат x, y, z) во всех точках области D, докажем теорему:

Т е о р е м а. *Если вектор-функция* $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ *моногенна во всех точках некоторой трехмерной области, то в этой области* $\mathbf{f} = p\mathbf{r} + \mathbf{c}$ (*p и вектор* $\mathbf{c}$ — *постоянные*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $\mathbf{f}$ моногенна в какой-нибудь точке M. Полагаем $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$, $\vec{\varepsilon}_k$ — орт координатной оси x_k. Получим, на основании уравнения (4), беря в нем $\mathbf{m} = \vec{\varepsilon}_k$ и обозначая тогда $\mathbf{n}_m$ через $\mathbf{n}_k$:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_k} = p\vec{\varepsilon}_k - q(\mathbf{n}_k \times \vec{\varepsilon}_k), \quad k = 1, 2, 3. \tag{5}$$

Возьмем теперь какой угодно орт $\mathbf{m} = \sum_1^3 \alpha_k \vec{\varepsilon}_k$ и заметим, что из (5) следует

$$\sum_1^3 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_k} \alpha_k = p \sum_1^3 \alpha_k \vec{\varepsilon}_k - q \sum_1^3 (\mathbf{n}_k \times \alpha_k \vec{\varepsilon}_k). \tag{6}$$

Так как левые части уравнений (4) и (6) одинаковы, то будем иметь

$$q \sum_1^3 (\mathbf{n}_k \times \alpha_k \vec{\varepsilon}_k) = q(\mathbf{n}_m \times \mathbf{m}), \tag{7}$$

где $\mathbf{m} = \alpha_1 \vec{\varepsilon}_1 + \alpha_2 \vec{\varepsilon}_2 + \alpha_3 \vec{\varepsilon}_3$.

Докажем теперь, что в данной точке M имеем $q = 0$. В самом деле, в противном случае все векторные произведения $\mathbf{m} \times \partial \mathbf{f} / \partial s$, $\vec{\varepsilon}_k \times \partial \mathbf{f} / \partial x_k$ отличны от нуля вследствие второго из уравнений (3), примененного к любому орту $\mathbf{m}$ и к ортам $\vec{\varepsilon}_k$, а на основании третьего из уравнений (3)

$$\mathbf{n}_m = -\frac{1}{q}\left(\mathbf{m} \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial s}\right), \quad \mathbf{n}_k = -\frac{1}{q}\left(\vec{\varepsilon}_k \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_k}\right), \tag{8}$$

так что все векторы $\mathbf{n}_m$ и $\mathbf{n}_k$ имеют определенные направления.

Полагаем (в предположении, что q отлична от нуля в данной точке M):

$$\vec{\varepsilon}'_k = \mathbf{n}_k \times \vec{\varepsilon}_k$$

и из уравнения (7) получим, сокращая на множитель q:

$$\sum_1^3 \alpha_k \vec{\varepsilon}'_k = \mathbf{n}_m \times \mathbf{m},$$

откуда

$$\left(\sum_1^3 \alpha_k \vec{\varepsilon}'_k\right)^2 = 1$$

и, следовательно, ввиду произвольного направления орта $\mathbf{m}$:

$$\vec{\varepsilon}'_i \cdot \vec{\varepsilon}'_k = 0 \qquad (i \neq k),$$

что приводит к равенству

$$\vec{\varepsilon}_i \cdot \mathbf{n}_k = 0 \qquad (i \neq k),$$

которое явно абсурдно, так как $\vec{\varepsilon}_k \cdot \mathbf{n}_k = 0$.

Итак, если $\mathbf{f}$ моногенна в точке M, то в этой точке имеем $q = 0$, и потому, вследствие (4),

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial s} = p\mathbf{m},$$

что дает, полагая $\mathbf{f} = u\vec{\varepsilon}_1 + v\vec{\varepsilon}_2 + w\vec{\varepsilon}_3$, уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = p, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = p. \tag{9}$$

2) Пусть $\mathbf{f}$ моногенна во всех точках внутренности D параллелепипеда с ребрами, параллельными осям координат. Из (9) следует, что в области D имеем:

$$u = u(x), \quad v = v(y), \quad w = w(z), \quad u'(x) = v'(y) = w'(z) = p.$$

Следовательно,

$$u = px + c_1, \quad v = py + c_2, \quad w = pz + c_3,$$

где p, c_1, c_2 и c_3 — постоянные в области D, что и доказывает теорему (и притом в случае любой трехмерной области D). Таким образом, кроме линейных функций радиуса-вектора $\mathbf{r}$, нет иных моногенных вектор-функций в трехмерных областях.

Поступило
16 I 1950