Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 4

МАТЕМАТИКА

В. ТАРТАКОВСКИЙ

ЯВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЛОКАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком В. М. Смирновым 31 III 1950)

Обозначения. Систему из n чисел $(q_1, \ldots, q_n)$ мы будем обозначать $\widetilde{q}$. Элемент матрицы $\mathfrak{M}$, стоящий на пересечении α-й строки и β-го столбца, мы будем обозначать $\{\mathfrak{M}\}_\alpha^\beta$. Нам придется рассматривать не только конечные, но и бесконечные матрицы. Мы будем часто нумеровать ряды (иногда и строки и столбцы, а иногда только строки или только столбцы) составным индексом $(k_1, \ldots, k_n)$, т. е. $\widetilde{k}$, например: $\{\mathfrak{M}\}_{(p_1,\ldots,p_n)}^{(q_1,\ldots,q_n)}$, т. е. $\{\mathfrak{M}\}_{\widetilde{p}}^{\widetilde{q}}$, или $\{\mathfrak{M}\}_\alpha^{(q_1,\ldots,q_n)}$, т. е. $\{\mathfrak{M}\}_\alpha^{\widetilde{q}}$.

Предельный переход и, следовательно, дифференцирование и интегрирование у матриц мы будем производить покомпонентно.

Открытый равносторонний полицилиндр $|x_1| < r, \ldots, |x_n| < r$ (где x_i — комплексные переменные) мы будем обозначать $Z(r)$, а его замыкание $\overline{Z}(r)$. Если надо отметить положительность r, то мы будем обозначать полицилиндры $Z^+(r)$ и $\overline{Z}^+(r)$. Полицилиндры $|x_1| < r, \ldots, |x_n| < r$, $|t| < r$ будем обозначать аналогично: $U(r)$, $\overline{U}(r)$, а при положительности r $U^+(r)$, $\overline{U}^+(r)$.

§ 1. Локальная линеаризация нелинейной проблемы посредством „расширения объекта". Рассмотрим автономную каноническую систему:

$$dx_\nu/dt = f_\nu(x_1, \ldots, x_n) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

у которой все правые части суть аналитические функции своих аргументов в $Z^+(R)$ и в этом полицилиндре разложимы в степенные ряды:

$$f_\nu(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty} a_{k_1,\ldots,k_n}^{(\nu)} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Мы будем пользоваться символом $a_{k_1,\ldots,k_n}^{(\nu)}$ при любых целых значениях индексов $k_1, \ldots, k_n$, причем будем приписывать этому символу значение нуль, если хоть один из индексов будет иметь отрицательное значение.

Обычно рассматривают вектор $\widetilde{x} = (x_1, \ldots x_n)$ как функцию скаляра t и вектора $\widetilde{x}_0 = (x_{1,0}, \ldots, x_{n,0})$ начальных значений. Однако зависимость вектора $\widetilde{x}$ от вектора $\widetilde{x}_0$ нелинейна и потому отыскать ее вид нелегко. Здесь оказывается полезной одна общая алгебраическая идея, которая может иметь довольно широкое поле применений. Идея эта состоит в том, чтобы произвести взаимно-однозначное отображение объектов $\tilde{x}$ и $\tilde{x}_0$ на новые объекты, которые, будучи многокомпонентными, благодаря этой многокомпонентности отображают зависимость между $\tilde{x}$ и $\tilde{x}_0$ (локально) как зависимость линейную, и изучать зависимость уже между этими новыми объектами. В качестве таких объектов проще всего выбрать такую систему компонент, которая состояла бы из компонент самого $\tilde{x}$ и их функций, образующих вместе полную систему в пространстве аналитических функций. Такую операцию можно назвать „расширением объекта“. В нашем случае в качестве расширенных объектов естественно выбрать однострочные матрицы:

$$x = \| 1, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1^2, x_1 x_2, \ldots, x_n^2, \ldots ;\ x_1^k, x_1^{k-1} x_2, \ldots, x_n^k, \ldots \| \tag{3}$$

или

$$\{x\}_1^{(k_1, \ldots, k_n)} = \{x\}_1^{\tilde{k}} = x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$$

и x_0, составленную из чисел $x_{1,0}, \ldots, x_{n,0}$ таким же образом, как матрица x составлена из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Зависимость между $\tilde{x}$ и x и $\tilde{x}_0$ и x_0, очевидно, взаимно-однозначна, а между x и x_0 — локально линейна. Последнее имеет место вследствие того, что из равенств

$$x_\nu = \sum_{l_1, \ldots, l_n = 0}^{\infty} b_{l_1, \ldots, l_n}^{(\nu)}(t)\, x_{1,0}^{l_1}, \ldots, x_{n,0}^{l_n} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

справедливых локально* в некотором $U^+(r)$, следует, путем почленного перемножения равенств (4) (с повторениями), справедливость внутри того же $U^+(r)$ всех разложений вида:

$$x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} = \sum_{l_1, \ldots, l_n = 0}^{\infty} b_{(l_1, \ldots, l_n)}^{(k_1, \ldots, k_n)}(t)\, x_{1,0}^{l_1} \ldots x_{n,0}^{l_n} \quad (k_1, \ldots, k_n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Эта система равенств может быть записана в матричной форме:

$$x = x_0 B(t), \quad \text{где} \quad \{B(t)\}_{\tilde{l}}^{\tilde{k}} = b_{\tilde{l}}^{\tilde{k}}(t) \quad (k_1, \ldots, k_n;\ l_1, \ldots, l_n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

§ 2. Матрица дифференцирования. Придадим системе (1) матричный вид. Пусть $P(x_1, \ldots, x_n)$ аналитична около начала, т. е. $P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k_1, \ldots, k_n = 0}^{\infty} P_{k_1, \ldots, k_n} x_1^{k_1}, \ldots, x_n^{k_n}$ в некотором $Z^+(\rho)$. Будем той же буквой P обозначать одностолбцовую матрицу с элементами: $\{P\}_k^1 = \{P\}_{(k_1, \ldots, k_n)}^1 = P_{k_1, \ldots, k_n}$ $(k_1, \ldots, k_n = 0, 1, 2, \ldots)$. Тогда $P(x_1, \ldots, x_n) = xP$. В этих обозначениях каждое из уравнений (1) имеет вид $dx_\nu / dt = xf_\nu$. Если составить из столбцов $f_1, \ldots, f_n$ n-столбцовую матрицу F, то систему (1) можно записать так: $(\tilde{x})_t = xF$. Недостаток этого уравнения в том, что в нем два неизвестных объекта $\tilde{x}$ и x. Дополним эту систему равенствами, которые выражают производные прочих компонент x через само x. В $Z^+(R)$ будут справедливы следующие равенства:

---

* Локальная справедливость равенств (4) является следствием известной теоремы об аналитическом характере зависимости решений системы (1) от начальных значений, т. е. от вектора $\tilde{x}_0$. В дальнейшем, однако, пользоваться этой теоремой не придется.

$$\left\{\frac{dx}{dt}\right\}_1^{\widetilde{k}} = \frac{d}{dt}[\{x\}_1^{\widetilde{k}}] = \frac{d}{dt}(x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}) = \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu x_1^{k_1-\delta_{1,\nu}}\ldots x_n^{k_n-\delta_{n,\nu}} f_\nu(x_1,\ldots,x_n) =$$

$$= \sum_{l_1,\ldots,l_n=0}^{\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu a^{(\nu)}_{l_1-k_1+\delta_{1,\nu},\ldots,l_n-k_n+\delta_{n,\nu}}\right) x_1^{l_1}\ldots x_n^{l_n}.$$

Пусть $\mathfrak{B}$ есть бесконечная направо и вниз квадратная матрица с элементами:

$$\{\mathfrak{B}\}_{\widetilde{l}}^{\widetilde{k}} = \{\mathfrak{B}\}_{(l_1,\ldots,l_n)}^{(k_1,\ldots,k_n)} = \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu a^{(\nu)}_{l_1-k_1+\delta_{1,\nu},\ldots,l_n-k_n+\delta_{n,\nu}}. \tag{7}$$

Тогда

$$\left\{\frac{dx}{dt}\right\}_1^{\widetilde{k}} = \sum_{l_1,\ldots,l_n=0}^{\infty} \{x\}_1^{\widetilde{l}}\{\mathfrak{B}\}_{\widetilde{l}}^{\widetilde{k}} = \{x\mathfrak{B}\}_1^{\widetilde{k}} \quad (k_1,\ldots,k_n = 0, 1, 2, \ldots),$$

т. е. в $Z^+(R)$

$$dx/dt = x\mathfrak{B}. \tag{8}$$

$\mathfrak{B}$ зависит от F: $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(F)$, и притом линейным образом: $\mathfrak{B}(C_1F_1 + C_2F_2) = C_1\mathfrak{B}(F_1) + C_2\mathfrak{B}(F_2)$. Итак, матрица $\mathfrak{B}$, в качестве правого множителя, дает дифференцирование x по t, вследствие чего мы будем называть $\mathfrak{B}$ матрицей дифференцирования.

Укажем еще один способ введения матрицы $\mathfrak{B}$. Назовем поле вектора $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}(x_1,\ldots,x_n) = (f_1,\ldots,f_n)$ полем скоростей. Решение системы (1) есть траектория в этом поле скоростей. Если считать, что аргументы в $P(x_1,\ldots,x_n)$ удовлетворяют системе (1), то P есть функция от t, заданная на траектории поля, и мы будем называть производную P_t' производной от P по времени на траектории поля (1). Эта производная, очевидно, есть функция места, ибо $\dfrac{dP}{dt} = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \dfrac{\partial P(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_\nu} f_\nu(x_1,\ldots,x_n)$. Обозначим матрицу коэффициентов этой функции места через P'. Тогда, как легко подсчитать:

$$P' = \mathfrak{B}P. \tag{9}$$

Таким образом, матрица $\mathfrak{B}$, в качестве левого множителя, является матрицей дифференцирования по времени на траекториях поля (1). Бесконечные направо и вниз („квадратные") матрицы $\mathfrak{M}$, у которых в каждой строке, начиная с некоторого места (положение которого зависит от матрицы и номера строки), все элементы суть нули, мы будем называть полуконечными. Множество всех полуконечных матриц, очевидно, образует кольцо. Главная особенность полуконечных матриц, по сравнению с бесконечными матрицами общего вида, состоит в том, что при выполнении над ними конечного числа действий сложения, вычитания и умножения не возникает вопроса о сходимости. Вопрос о сходимости, так же как и в отношении конечных матриц, возникает лишь в отношении результата бесконечного числа действий. Матрица дифференцирования полуконечна.

§ 3. Решение систем (8) и (1). Нетрудно доказать оценку:

Лемма. *Для матрицы дифференцирования (7) существуют такие положительные константы N и r, что при любом натуральном ν*

$$|\{\mathfrak{B}^\nu\}_{\widetilde{p}}^{\widetilde{q}}| \leqslant q r^q \left(\frac{2}{r}\right)^p N^\nu (\nu-1)! \tag{10}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots;\ p_1,\ldots,p_n, q_1,\ldots,q_n = 0, 1, 2, \ldots);$$

здесь $p = p_1 + \cdots + p_n$ *и* $q = q_1 + \cdots + q_n$).

Из последней оценки легко вывести существование такого $Z^+(\rho')$, в котором существуют все произведения $x(\mathfrak{B}^\nu)$ и справедливы все выражающие ассоциативность равенства: $[x(\mathfrak{B}^\sigma)]\cdot\mathfrak{B}^\tau = x(\mathfrak{B}^\sigma\cdot\mathfrak{B}^\tau) = x\mathfrak{B}^{\sigma+\tau}$, причем радиус ρ' положителен и один и тот же для всех ν. Отсюда следует, по (8):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}x\right) = \frac{d}{dt}(x\mathfrak{B}) = \left(\frac{d}{dt}x\right)\mathfrak{B} = (x\mathfrak{B})\mathfrak{B} = x\cdot\mathfrak{B}^2 \quad \text{и т. д.,}$$

так что в некотором $Z^+(\rho')$ с одним и тем же положительным ρ' для всех ν

$$d^\nu x/dt^\nu = x\mathfrak{B}^\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{11}$$

Равенство

$$x = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\left(\frac{d^\nu x}{dt^\nu}\right)_{x=x_0} t^\nu \tag{12}$$

справедливо в некотором $U^+(\rho'')$, ибо справедливо для всех компонент в $U^+(\rho'')$ с одним и тем же ρ'' для всех компонент. Подставляя (11) в (12) и пользуясь оценками (10), мы установим, что

$$x = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}(x\mathfrak{B}^\nu)_{x=x_0} t^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}x_0\mathfrak{B}^\nu t^\nu = x_0\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu!}\mathfrak{B}^\nu t^\nu\right)$$

в некотором $U^+(\rho)$. Иначе говоря, равенство

$$x = x_0 e^{\mathfrak{B}t} \tag{13}$$

локально справедливо, т. е. справедливо в некотором $U^+(\rho)$ с одним и тем же для всех компонент положительным ρ. Если нам нужно получить не x, а $\tilde{x}$, то для этого достаточно помножить обе части равенства (13) справа на n-столбцовую бесконечную вниз матрицу $\mathfrak{E}_n$, у которой строки 2-я, 3-я, ..., $n+1$-я образуют единичную матрицу, а все остальные строки — нулевые. И тогда в том же $U^+(\rho)$

$$\tilde{x} = (x_0 e^{\mathfrak{B}t})\,\mathfrak{E}_n = x_0\,(e^{\mathfrak{B}t}\,\mathfrak{E}_n). \tag{14}$$

Изложенный вывод формулы (14) совершенно независим от мажорантного метода Коши и представляет собою не только построение решения, но и доказательство существования этого решения. Формулы (13) и (14) показывают, что переход от матрицы F, задающей систему (1), к решению системы состоит из двух этапов: 1-й этап: построение полуконечной матрицы дифференцирования $\mathfrak{B}(F) = \mathfrak{B}$, которая от F зависит линейно, и 2-й этап: построение показательной функции $e^{\mathfrak{B}t}$ (с последующими домножениями слева на x_0 и справа на $\mathfrak{E}_n$). Существенно отметить, что многие локальные, в том числе и качественные, проблемы теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений могут быть удобно и естественным образом сформулированы именно как некоторые проблемы в отношении матрицы $\mathfrak{B}$.

Заметим, в заключение, что если бы в системе (1) правые части содержали t, т. е.

$$dx_\nu/dt = f_\nu(x_1, \ldots, x_n, t) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{15}$$

то мы могли бы ввести новую дополнительную функцию $x_{n+1} = t$, и тогда система приняла бы вид:

$$dx_\nu/dt = f_\nu(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n, n+1), \tag{15'}$$

причем

$$f_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \equiv 1.$$

Поступило
13 II 1950