Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 4

МАТЕМАТИКА

И. Ф. ЛОХИН

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЦЕЛОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НОРМАЛЬНОГО ТИПА

(Представлено академиком И. Г. Петровским 31 III 1950)

1. А. О. Гельфондом [1] подробно исследована проблема представления целой функции $F(z)$ первого порядка нормального типа, когда заданы некоторые функционалы, связанные с коэффициентами разложения Тейлора целой функции. Им получено представление целой функции $F(z)$ в виде ряда, расположенного по полиномам, равномерно сходящегося во всякой ограниченной замкнутой области плоскости z, при ограничениях на рост $F(z)$, необходимых для единственности целой функции. Коэффициенты этого разложения апроксимируются через интерполяционные данные с любой степенью точности.

В настоящей статье дается новое представление целой функции $F(z)$ с помощью одной вспомогательной функции, определяемой непосредственно через интерполяционные данные. Функция $F(z)$ представляется посредством вспомогательной функции в виде некоторого интеграла, из которого легко получается, например, представление функции рядом Ньютона, рядом Абеля и др.

2. Пусть функция $F(z)$ — целая первого порядка нормального типа, а $f(z)$ — функция, ассоциированная с $F(z)$ по Борелю. Допустим, далее, что заданы функционалы:

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\zeta} [u(\zeta)]^n f(\zeta)\,d\zeta \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

где $u(\zeta)$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$, — регулярная функция в конечной или бесконечной односвязной области D'_ζ, однолистная в области D_ζ, содержащейся в D'_ζ, а замкнутый контур C_ζ лежит внутри D_ζ и содержит внутри себя все особые точки $f(\zeta)$. Отображение области D_ζ и кривой C_ζ в плоскости u обозначим, соответственно, через D_u и C_u. С помощью чисел A_n образуем функцию $\Phi(t)$ посредством ряда:

$$\Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{t^n}. \tag{2}$$

Этот ряд при $|t|$ достаточно больших будет сходиться. Действительно, обозначая через d наибольшее расстояние точек кривой C_u от начала, из (1) будем иметь оценку:

$$|A_n| < Md^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

где M — постоянное. Поэтому при $|t|>d$ ряд (2) действительно сходится. Следовательно, функция $\Phi(t)$ будет регулярной в бесконечности. Для $|t|>d$, пользуясь (1), функцию $\Phi(t)$ можно представить интегралом:

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\zeta}\frac{1}{1-\frac{u(\zeta)}{t}}f(\zeta)\,d\zeta. \tag{4}$$

Из этого представления и однолистности функции $u(\zeta)$ внутри кривой C_ζ следует, что функция $\Phi(t)$ будет регулярной, во всяком случае, для любого значения t, лежащего вне кривой C_u.

Таким образом, имеем теорему:

Теорема 1. *Пусть функция $F(z)$ — целая первого порядка нормального типа, а $f(z)$ — функция, ассоциированная с $F(z)$ по Борелю.*

Тогда функция $\Phi(t)$, определяемая рядом:

$$\Phi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n}{t^n}, \tag{5}$$

где

$$A_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\zeta}[u(\zeta)]^n f(\zeta)\,d\zeta \quad (n=0,1,2,\ldots), \tag{6}$$

причем $u(\zeta)$, $u(0)=0$, $u'(0)=1$, — регулярная функция в конечной или бесконечной односвязной области D'_ζ и однолистная в D_ζ, содержащейся в D'_ζ, замкнутый контур C_ζ лежит внутри D_ζ и содержит внутри себя все особые точки $f(\zeta)$, будет регулярной, во всяком случае, для любого t, лежащего вне кривой C_u, в которую преобразуется C_ζ посредством $u=u(\zeta)$.

3. Функция $\Phi(t)$ дает возможность дать новое представление функции $F(z)$.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 имеет место представление:*

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\zeta}\Phi[u(v)]\frac{u'(v)}{u(v)}e^{zv}\,dv=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_u}\Phi(u)\frac{e^{zv(u)}}{u}\,du, \tag{7}$$

где $v(u)$ — функция, обратная функции $u=u(v)$.

Доказательство. Для доказательства рассмотрим контуры C'_ζ, C_ζ, C''_ζ, лежащие в области D_ζ и такие, что особые точки $f(\zeta)$ содержатся внутри C'_ζ, C_ζ охватывает C'_ζ, а C''_ζ охватывает C_ζ. Образы кривых C'_ζ, C_ζ, C''_ζ в плоскости u обозначим, соответственно, через C'_u, C_u, C''_u. Пусть t — точка кривой C_u, в которую преобразуется точка v кривой C_ζ. Рассмотрим теперь интеграл

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C''_\zeta}\frac{1}{1-\frac{u(\zeta)}{t}}f(\zeta)\,d\zeta. \tag{8}$$

Подинтегральная функция имеет особенности внутри контура C'_ζ и в точке $\zeta = v$ — простой полюс. Поэтому, по теореме Коши, будем иметь:

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'_\zeta} \frac{1}{1-\frac{u(\zeta)}{t}} f(\zeta)\,d\zeta - \frac{t}{u'(v)} f(v); \tag{9}$$

или, в силу (4), получаем:

$$I = \Phi(t) - \frac{t}{u'(v)} f(v). \tag{10}$$

Из (8) и (10) получаем:

$$\Phi(t) = \frac{t}{u'(v)} f(v) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C''_\zeta} \frac{1}{1-\frac{u(\zeta)}{t}} f(\zeta)\,d\zeta. \tag{11}$$

Полагая $t = u(v)$, из (11) находим:

$$f(v) = \Phi[u(v)]\frac{u'(v)}{u(v)} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C''_\zeta} \frac{u'(v)}{u(v)-u(\zeta)} f(\zeta)\,d\zeta. \tag{12}$$

Интеграл в правой части равенства (12) определяет функцию, аналитическую внутри и на контуре C_ζ.

Умножая (12) на e^{zv} и интегрируя по контуру C_ζ, получим

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\zeta} \Phi[u(v)]\frac{u'(v)}{u(v)} e^{zv}\,dv.$$

Таким образом, теорема доказана.

Непосредственным следствием этой теоремы являются теорема единственности и теорема, связанная с разложением функции $F(z)$ в обычные интерполяционные ряды, установленные А. О. Гельфондом ([1]).

Теорема 3. *Если при выполнении всех условий теоремы* 1 $A_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, *то* $F(z) \equiv 0$.

Теорема 4. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1 *и, кроме того, функция* $u(\zeta)$ *отображает область* D_ζ *на круг* $|u| \leqslant \rho'$.

Тогда для функции $F(z)$ *имеет место разложение*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(z), \tag{13}$$

$$P_n(z) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\zeta^n}\left\{\frac{u'(\zeta)\zeta^{n+1}e^{z\zeta}}{[u(\zeta)]^{n+1}}\right\}_{\zeta=0} = \frac{1}{n!}\left\{\frac{d^n}{du^n} e^{zv(u)}\right\}_{u=0}, \tag{14}$$

где $v(u)$ — *функция, обратная функции* $u = u(v)$.

4. Пользуясь теоремой 4, докажем теорему:

Теорема 5. *Пусть выполнены все условия теоремы* 4 *и, кроме того,* $\rho' < 1$, *а числа* A_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — *целые (или, по крайней мере, целые, начиная с некоторого номера* $n > N_0$).

Тогда функция $F(z)$ *является многочленом.*

Доказательство. В условиях теоремы функция $\Phi(t)$ будет регулярна в области $|t| \geqslant 1$. Следовательно, ряд (2) будет сходиться при некоторых t, $|t| < 1$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 0$. Но так как A_n — числа целые, то будем иметь

$$A_n = 0, \qquad n > n_0. \tag{15}$$

С другой стороны, по теореме 4 функция $F(z)$ представляется рядом (13). Из (13), (15) следует утверждение теоремы.

Как частные случаи этой теоремы получим различные обобщенные теоремы Полиа.

Пусть функция $u(\zeta)$ имеет вид:

$$u(\zeta) = e^{\zeta} - 1. \tag{16}$$

Эта функция отображает область

$$|e^{\zeta} - 1| < 1, \quad -\pi < I\,\mathrm{Im}\zeta < \pi \tag{17}$$

на круг $|u| < 1$. Поэтому будем иметь известную теорему:

Теорема 6. *Пусть $F(z)$ — целая функция первого порядка нормального типа, ассоциированная которой имеет все свои особенности внутрь области, определяемой неравенством* (17), *а числа $F(n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ целые.*

Тогда $F(z)$ есть полином.

Действительно, в условиях теоремы $A_n = \Delta^n F(0)$ и будет справедливо (15). Поэтому $F(z)$ будет полиномом.

Точно так же получим теорему:

Теорема 7. *Пусть функция $F(z)$ — целая первого порядка нормального типа и числа $F^{(n)}(n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ целые.*

Тогда, если $f(z)$ — функция, ассоциированная с $F(z)$ по Борелю, имеет все свои особенности внутри одласти

$$|\zeta e^{\zeta}| < \frac{1}{e}, \tag{18}$$

то $F(z)$ есть многочлен.

Таким же образом можно получить ряд других аналогичных теорем.

В заключение отметим, что из представления целой функции первого порядка нормального типа формулой (7) легко получается разложение ее в ряд по полиномам и необходимые и достаточные условия, чтобы функция $F(z)$ была квази-полиномом.

Поступило
28 III 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. О. Гельфонд, Усп. матем. наук, в. 3, 144 (1937).