Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 4

*МАТЕМАТИКА*

М. С. ЛИВШИЦ и В. П. ПОТАПОВ

# ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

*(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 5 IV 1950)*

Настоящая статья посвящена изучению спектра квази-унитарного оператора и отысканию его инвариантных подпространств. С этой целью введенная ранее одним из авторов [1, 2] характеристическая матрица-функция квази-унитарного оператора определенным образом нормируется. Понятие нормированной характеристической функции позволяет установить соответствие между квази-унитарными операторами и аналитическими матрицами-функциями, обладающими некоторыми простыми свойствами.

1°. Как известно, произвольная квадратная матрица $\tau$ может быть представлена в виде:

$$\tau = utv, \tag{1}$$

где $u$, $v$ — унитарные матрицы, а $t = \| \lambda_i \delta_{ij} \|_1^m$ — матрица, диагональные элементы которой удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_m$.

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь такие матрицы $\tau$, для которых $\mathrm{Det}(I - \tau^* \tau) \neq 0$.

Обозначая через $p$ число отрицательных квадратов формы с матрицей $I - \tau^* \tau$, рассмотрим матрицу

$$J = J_p = \begin{pmatrix} I^{(q)} & 0 \\ 0 & -I^{(p)} \end{pmatrix} \quad (p + q = m)$$

и назовем матрицу $x$ $J$-нерастягивающей, если

$$J - x^* J x \geqslant 0, \tag{2}$$

и $J$-унитарной, если

$$J - x^* J x = 0. \tag{3}$$

В случае $p = 0$ $(J_p = I)$ матрица $x$, удовлетворяющая (2) или (3), называется просто нерастягивающей и, соответственно, унитарной.

В соответствии с обычным определением функции от матрицы, получим:

$$|I - \tau\tau^*|^{1/2} = u\,|I - t^2|^{1/2}\, u^*,$$

$$|I - \tau^* \tau|^{-1/2} = v^*\,|I - t^2|^{-1/2}\, v, \quad |I - t^2| = J\,(I - t^2).$$

Обозначая через $x$, $y$ переменные матрицы, рассмотрим преобразование

$$y = u^* \, |I - \tau\tau^*|^{1/2} (I - x\tau^*)^{-1} (\tau - x) \, |I - \tau^* \tau|^{-1/2} v^*. \qquad (4)$$

Теорема 1. *Преобразование* (4) *устанавливает взаимно-однозначное соответствие между нерастягивающими матрицами $x$, для которых* $\mathrm{Det}(I - x\tau^*) \neq 0$, *и $J$-нерастягивающими матрицами $y$, причем унитарным матрицам $x$ соответствуют $J$-унитарные $y$.*

Обратное преобразование имеет вид:

$$x = uJ \, |I - t^2|^{1/2} (I - yt)^{-1} (t - y) \, |I - t^2|^{-1/2} Jv. \qquad (5)$$

Этой теоремой мы воспользуемся для построения нормированной характеристической функции квази-унитарного оператора.

2°. Линейный оператор $T$, действующий в некотором гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, называется квази-унитарным порядка $m$, если выполняются требования:

1) $T$ является расширением некоторого изометрического оператора $V$ с индексом дефекта $(m, m)$;

2) оператор $T$ отображает $D$ в $D'$, где $D$ и $D'$ — дефектные подпространства оператора $V$.

При заданном операторе $V$ оператор $T$ вполне определяется соотношениями

$$Tg_i = \sum_{k=1}^{m} \tau_{ik} g_k' \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

где $g_i$, $g_i'$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ — ортонормированные базисы подпространств $D$ и $D'$.

Матрицу $\tau = \| \tau_{ik} \|_1^m$ будем называть матрицей расширения квази-унитарного оператора $T$. Условие $\mathrm{Det}(I - \tau^* \tau) \neq 0$ означает, что $T$ не является расширением никакого изометрического оператора с меньшим индексом дефекта. В этом случае число $m$ называется рангом $T$.

Сигнатуру формы с матрицей $I - \tau^* \tau$ назовем сигнатурой оператора $T$.

Квази-унитарный оператор $T$ ранга $m$ назовем простым, если будет простым ([1], [2]) соответствующий изометрический оператор $V$.

В статьях ([1], [2]) было введено понятие характеристической матрицы-функции $w(\zeta)$ изометрического оператора $V$. Матрица-функция $w(\zeta)$ определяет простой изометрический оператор $V$ с точностью до унитарной эквивалентности и обладает следующими свойствами:

1) $w(\zeta)$ — регулярная функция от $\zeta$ в круге $|\zeta| < 1$;

2) $w(\zeta)$ $(|\zeta| < 1)$ — нерастягивающая матрица;

3) $w(0) = 0$.

Определение. Матрицу

$$w_T(\zeta) = u^* \, |I - \tau\tau^*|^{1/2} (I - w(\zeta)\tau^*)^{-1} (\tau - w(\zeta)) \, |I - \tau^* \tau|^{-1/2} v^* \qquad (6)$$

будем называть нормированной характеристической матрицей-функцией оператора $T$.

Формула (6) определяет $w_T(\zeta)$ с точностью до постоянных унитарных сомножителей слева и справа перестановочных с $t$.

Теорема 2. *Для того чтобы наперед заданная матрица-функция $m$-го порядка $w(\zeta)$ была нормированной характеристической функцией некоторого квази-унитарного оператора ранга $m$, необходимо и достаточно, чтобы:*

1) *$w(\zeta)$ была мероморфна в круге $|\zeta| < 1$ и регулярна в точке $\zeta = 0$;*

2) *$w(\zeta)$ $(|\zeta| < 1)$ была $J$-нерастягивающей;*

3) *$w(0) = t$, где $t = \| \lambda_i \delta_{ij} \|$ — некоторая диагональная матрица, у которой $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_m$,* $\mathrm{Det}(I - t^2) \neq 0$.

Т е о р е м а 3. *Для того чтобы два простых квази-унитарных оператора были унитарно эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы их нормированные характеристические матрицы-функции совпадали.*

Эта теорема является дальнейшим развитием теоремы, установленной одним из авторов ([1, 2]) для случая изометрического оператора.

Перейдем теперь к отысканию собственнных чисел и непрерывного спектра квази-унитарного оператора.

Может случиться, что все точки, лежащие внутри единичного круга, являются собственными числами оператора $T$. В этом случае $\operatorname{Det} w_T(\zeta) \equiv 0$. Оставляя в стороне эту возможность, мы предположим, что существует хотя бы одна точка внутри единичного круга, в которой $\operatorname{Det} w_T(\zeta) \neq 0$.

Т е о р е м а 4. *Для того чтобы точка $\zeta_0$, $|\zeta_0| < 1$, была регулярной для резольвенты оператора $T$, необходимо и достаточно, чтобы матрица $w_T^{-1}(\zeta)$ была регулярной функцией в точке $\zeta_0$.*

*Для того чтобы точка $\zeta_0$, $|\zeta_0| = 1$, была регулярной для резольвенты оператора $T$, необходимо и достаточно, чтобы матрица $w_T^{-1}(\zeta)$ была аналитически продолжаема через дугу единичного круга в окрестности точки $\zeta_0$ и $J$-унитарна на этой дуге.*

Заменяя в первой части теоремы $w_T^{-1}(\zeta)$ на $\overset{*}{w}_T(1/\bar{\zeta})$, получим аналогичный результат для $|\zeta_0| > 1$.

Существование инвариантных подпространств квази-унитарного оператора $T$ тесно связано с разложением на множители характеристической матрицы-функции $w_T(\zeta)$.

Применяя в случае необходимости преобразование

$$(I - \zeta_0 T)^{-1}(T - \zeta_0 I) = T_{\zeta_0},$$

мы можем заранее считать, что рассматриваемый квази-унитарный оператор имеет обратный.

Подпространство $\mathfrak{H}_1$ будем называть инвариантным для оператора $T$, если $T\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_1$. Очевидно, подпространство $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1$ будет инвариантным для сопряженного оператора $T^*$.

Через $T_1$ обозначим оператор, индуцируемый оператором $T$ в $\mathfrak{H}_1$, а через $T_2$ — сопряженный к оператору, индуцируемому в $\mathfrak{H}_2$ оператором $T^*$.

Нетрудно видеть, что если оператор $T$ имеет в $\mathfrak{H}$ ранг $m$, то операторы $T_1$ и $T_2$ имеют в $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ ранги, не превосходящие $m$.

Пусть $V_1$ и $V_2$ — изометрические операторы, индуцируемые оператором $V$ в подпространствах $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$, соответственно, а $D_1$, $D_1'$ и $D_2$, $D_2'$ — их дефектные пространства.

Оператор $V_1 \oplus V_2$ имеет своими дефектными подпространствами в $\mathfrak{H}$ $D_1 \oplus D_2$ и $D_1' \oplus D_2'$, а $T$ является его квази-унитарным расширением.

Объединяя базисы $D_1$, $D_2$; $D_1'$, $D_2'$, соответственно, мы получим базисы пространств $D_1 \oplus D_2$, $D_1' \oplus D_2'$. При этом выборе базисов матрица расширения $\vartheta$ оператора $T$ относительно $V_1 \oplus V_2$ имеет вид

$$\vartheta = \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 \\ \alpha & \tau_2 \end{pmatrix},$$

где $\tau_1$ и $\tau_2$ — матрицы расширений операторов $T_1$ и $T_2$. Матрицу $\vartheta$ назовем матрицей сцепления, а матрицу $\alpha$ — коэффициентом сцепления.

Рассмотрим тот случай, когда $T_1$ и $T_2$ имеют ранг $m$. Тогда сигнатуры операторов $T_1$, $T_2$, $T$ равны, а коэффициент сцепления $\alpha$ имеет вид:

$$\alpha = | I - \tau_2 \overset{*}{\tau_2} |^{1/2} u_2 s_0 v_1 | I - \overset{*}{\tau_1} \tau_1 |^{1/2},$$

где $s_0$ — некоторая $J$-унитарная матрица.

Теорема 5. *Пусть $w_1(\zeta)$, $w_2(\zeta)$ — нормированные характеристические матрицы-функции операторов $T_1$ и $T_2$ в подпространствах $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$, соответственно. Тогда нормированная характеристическая матрица-функция оператора $T$ представляется в виде произведения*

$$w_T(\zeta) = s_1 w_1(\zeta) J \overset{*}{s_0} w_2(\zeta) s_2,$$

*где $s_1$, $s_2$ — некоторые $J$-унитарные матрицы.*

Одесский государственный
педагогический институт
им. К. Д. Ушинского

Поступило
8 III 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. С. Лившиц, ДАН, 58, № 1 (1947). [2] М. С. Лившиц, Матем. сборн., 26 : 2 (1950).