Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 4

МАТЕМАТИКА

А. Ф. ЛЕОНТЬЕВ

ОБ ОДНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПОЛИНОМОВ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 31 III 1950)

Известно (см., например, (1)), что последовательность функций $\{x^{\lambda_n}\}$, где $0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n<\ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$, полна в классе непрерывных функций на отрезке [0, 1] тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-1}=\infty$. При соблюдении последнего условия только из равномерной сходимости последовательности полиномов

$$P_n(x)=\sum_{j=1}^{n}a_{nj}\,x^{\lambda_j}\quad(n=1,2,\ldots)\tag{1}$$

на отрезке [0, 1] нельзя, следовательно, вывести иных свойств предельной функции, кроме того, что она на отрезке [0, 1] непрерывна.

В настоящей статье доказывается

Теорема 1. *Пусть* $0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n<\ldots$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-1}<\infty$. *Если последовательность* (1) *равномерно сходится на отрезке* [0, 1], *то тогда она сходится и в области* $0<|x|<1$, $-\infty<\arg x<\infty$, *причем на любом ограниченном замкнутом множестве этой области сходится равномерно. Предельная функция в указанной области есть, следовательно, аналитическая.*

Доказательство. Из равномерной сходимости последовательности (1) на отрезке [0, 1] вытекает ее равномерная ограниченность. Поэтому, полагая $\mu_j=\lambda_j+1$, $x=e^{-z}$, получим, что последовательность

$$Q_n(z)=\sum_{j=1}^{n}a_{nj}\,e^{-\mu_j z}\quad(n=1,2,\ldots)\tag{2}$$

равномерно сходится на отрезке $[0,\infty)$ и удовлетворяет на этом отрезке условию:

$$|Q_n(z)|<Me^{-z}\quad(M=\text{const}).\tag{3}$$

Заметив, что в силу условия $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n^{-1}<\infty$ произведение $\prod\limits_{1}^{\infty}\left(1-\frac{\mu}{\mu_n}\right)$ сходится, введем функции:

$$\Phi_0(\mu)=\frac{1}{(1+\mu)^2},\quad \Phi_k(\mu)=\frac{1}{(1+\mu)^2}\prod_{n=1}^{k}\frac{1-\mu/\mu_n}{1+\mu/\mu_n},$$

$$F_k(\mu)=\frac{1}{(1+\mu)^2}\prod_{n=k}^{\infty}\frac{1-\mu/\mu_n}{1+\mu/\mu_n}\quad (k=1,2,\ldots).$$

В замкнутой полуплоскости $\operatorname{Re}\mu \geqslant 0$ эти функции по модулю не превосходят $|1+\mu|^{-2}$. Поэтому функции действительного переменного s

$$f_k(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{\infty i}\frac{F_k(\mu)}{1+\mu/\mu_k}e^{s\mu}\,d\mu\quad (k=1,2,\ldots)$$

равны нулю при $s\leqslant 0$, непрерывны при $s\geqslant 0$ и по модулю меньше единицы. Последовательность этих функций на отрезке $[0,\infty)$ равномерно сходится к функции se^{-s}. В силу известных формул обращения интегралов Лапласа, имеем при $\operatorname{Re}\mu>0$:

$$\frac{F_k(\mu)}{1+\mu/\mu_k}=\int_0^{\infty}f_k(s)\,e^{-\mu s}ds\quad (k=1,2,\ldots).$$

Отсюда, положив $s=t-z$, где фиксированное $z\geqslant 0$, получим:

$$\frac{F_k(\mu)}{1+\mu/\mu_k}e^{-\mu z}=\int_z^{\infty}f_k(t-z)\,e^{-\mu t}\,dt=\int_0^{\infty}f_k(t-z)\,e^{-\mu t}\,dt. \tag{4}$$

Введем операторы:

$$M_k[\psi(z)]=\int_0^{\infty}f_k(t-z)\,\psi(t)\,dt\quad (k=1,2,\ldots). \tag{5}$$

В силу (3), на отрезке $[0,\infty)$

$$|M_k[Q_n(z)]|<M, \tag{6}$$

а в силу (4) на том же отрезке

$$\beta_{k,n}(z)=M_k[Q_n(z)]=\sum_{j=1}^{k-1}a_{nj}\frac{F_k(\mu_j)}{1+\mu_j/\mu_k}e^{-\mu_j z}. \tag{7}$$

Кроме того, при фиксированном k последовательность функций $\{\beta_{k,n}(z)\}$ на отрезке $[0,\infty)$ равномерно сходится, что видно из (5). Наконец, введем в рассмотрение функции

$$\omega_n(z)=-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_{k+1,n}(0)}{\mu_k}\,\frac{\Phi_{k-1}(z)}{1+z/\mu_k}\quad (n=1,2,\ldots).$$

В силу условия $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu_k^{-1}<\infty$ и условия (6) они в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Re} z\geqslant 0$ регулярны и удовлетворяют неравенству

$$|\omega_n(z)|<2M\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{-1}. \tag{8}$$

На любом ограниченном замкнутом множестве указанной полуплоскости последовательность этих функций равномерно сходится.

На основании легко доказываемого тождества

$$\sum_{k=1}^{j} \frac{F_{k+1}(\mu)}{1+\mu/\mu_k} \frac{\Phi_{k-1}(\mu_j)}{1+\mu_j/\mu_k} \frac{1}{\mu_k} = -\frac{F_1(\mu)}{2(\mu-\mu_j)(1+\mu_j)^2}$$

далее получим, в силу (7), что при $j > n$ $\omega_n(\mu_j) = 0$, а при $j \leqslant n$

$$\omega_n(\mu_j) = a_{nj} \frac{F_1'(\mu_j)}{(1+\mu_j)^2}. \tag{9}$$

После этого рассмотрим интеграл

$$A_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_n(\mu)}{F_1(\mu)} e^{-z\mu}\, d\mu,$$

где проходимый в положительном направлении замкнутый контур L образован двумя лучами, составляющими с положительным направлением действительной оси углы, соответственно равные φ и $-\varphi$, причем $0 < \varphi < \pi/2$.

Так как вдоль контура L, когда $|\mu| > r_0(\varepsilon)$, выполняется, что нетрудно показать, неравенство

$$|F_1(\mu)| > e^{-\varepsilon|\mu|},$$

то, следовательно, в силу (8), функция $A_n(z)$ есть аналитическая, во всяком случае, в угле $|\arg z| < \pi/2 - \varphi$. Кроме этого, в силу равномерной относительно n оценки (8) и того факта, что на любом ограниченном замкнутом множестве полуплоскости $\operatorname{Re}\mu \geqslant 0$ последовательность $\{\omega_n(\mu)\}$ равномерно сходится, заключаем, что на любом ограниченном замкнутом множестве угла $|\arg z| < \pi/2 - \varphi$ последовательность $\{A_n(z)\}$, а следовательно, и последовательность $\left\{\frac{d^2}{dz^2}[e^{-z} A_n(z)]\right\}$ равномерно сходятся. Но, на основании (9),

$$A_n(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{nj}}{(1+\mu_j)^2} e^{-\mu_j z}, \quad \frac{d^2}{dz^2}[e^{-z} A_n(z)] = Q_n(z).$$

Изменяя угол φ в пределах $0 < \varphi < \pi/2$, мы получим, что последовательность (2) на любом ограниченном замкнутом множестве полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ сходится равномерно. Из этого тогда будет следовать, что последовательность (1) равномерно сходится на любом ограниченном замкнутом множестве области $0 < |x| < 1$, $-\infty < \arg x < \infty$, что и требовалось доказать.

Из установленной сходимости последовательности функций

$$\overline{P}_n(z) = P_n(e^{-z}) = \sum_{j=1}^{n} a_{nj} e^{-\lambda_j z} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ и того факта, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0$, вытекает, на основании работы [2], что: 1) предельная функция $\overline{f}(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{P}_n(z)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \alpha$, где $\alpha \leqslant 0$, причем при $\alpha \neq -\infty$ прямая $\operatorname{Re} z=\alpha$ для функции $\bar{f}(z)$ является купюрой; 2) существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nj}=a_j$ $(j=1, 2, \ldots)$; 3) в том случае, когда величина

$$\delta=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\lambda_n}\ln\left|\frac{1}{F'(\lambda_n)}\right|,\quad F(z)=\prod_1^\infty\left(1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right),$$

конечна, ряд $\sum\limits_{j=1}^\infty a_j e^{-\lambda_j z}$ сходится во всяком случае в полуплоскости $\operatorname{Re} z>\alpha+\delta$ и притом к той же функции $\bar{f}(z)$.

Эти результаты применительно к последовательности (1) формулируются следующим образом:

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1: 1) *предельная функция* $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} P_n(x)$ *регулярна в области* $0<|x|<\rho$, $-\infty<\arg x<\infty$, *где* $\rho\geqslant 1$, *причем при* $\rho<\infty$ *граница этой области является для функции* $f(x)$ *купюрой;* 2) *существуют пределы* $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nj}=a_j$ $(j=1, 2, \ldots)$; 3) *в том случае когда величина*

$$\gamma=\underline{\lim_{n\to\infty}}|F'(\lambda_n)|^{1/\lambda_n},\quad F(z)=\prod_1^\infty\left(1+\frac{z^2}{\lambda_j^2}\right),$$

отлична от нуля, ряд $\sum\limits_{j=1}^\infty a_j x^{\lambda_j}$ *сходится и притом к функции* $f(x)$ *в области* $0<|x|<\rho\gamma$, $-\infty<\arg x<\infty$.

Поступило
28 III 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. И. Ахиезер, Лекции по теории апроксимации, 1947, стр. 52. [2] А. Ф. Леонтьев, Изв. АН СССР, сер. матем., **13**, 221 (1949).