Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 4

МАТЕМАТИКА

Н. Я. ВИЛЕНКИН

ПРЯМЫЕ СПЕКТРЫ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП И ИХ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ГРУППЫ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 4 IV 1950)

1. Определение 1. Пусть G — топологическая группа. Мы скажем, что в G задана ограниченность, если в ней задано множество $T=(M_\alpha)$ ее подмножеств, называемых ограниченными, причем: 1) если множество A ограничено и $B\subset A$, то B ограничено; 2) если множества A и B ограничены, то ограничены и множества $A\cup B$ и AB; 3) если множество A ограничено, то и A^{-1} ограничено; 4) каждая точка ограничена*.

Если H — подгруппа топологической группы G с заданной ограниченностью, то ограниченными в H множествами называются множества вида $H\cap A$, где A — ограниченное множество в G.

Пусть G и G_1 — топологические группы с заданными в них ограниченностями. Гомоморфное отображение φ группы G в G_1 называется ограниченным, если образ каждого ограниченного в G множества ограничен в G_1, ограничивающим, если для каждого ограниченного множества $A\subset G_1$ найдется такое ограниченное множество $B\subset G$, что $A\cap\varphi(G)\subset\varphi(B)$, и биограниченным, если оно ограниченное и ограничивающее.

Пусть H — нормальный делитель топологической группы G с заданной в ней ограниченностью. Назовем ограниченными в G/H множествами образы ограниченных множеств из G. При таком определении естественное гомоморфное отображение G на G/H будет биограниченным. Назовем топологические группы G и G_1 вполне изоморфными, если существует биограниченное изоморфное отображение группы G на G_1. Если φ является открытым биограниченным гомоморфным отображением группы G на G_1, то G_1 вполне изоморфна фактор-группе G/H. Если G является прямой суммой топологических абелевых групп G_α с отмеченными в них подгруппами H_α ([2]), то ограниченным в G называется такое множество A, что при любом α его проекция A_α в G_α ограничена в G_α, причем почти при всех α $A_\alpha\subset H_\alpha$.

2. Пусть G — топологическая абелева группа и X — абстрактная группа ее непрерывных характеров. Через $N(A)$ будем обозначать совокупность таких характеров χ, что $|\chi(g)|<1/4$ для всех $g\in A$. Назовем ядром в X множество $N(A)$, где A — ограниченное подмножество в G, и открытым в X — такое множество Φ, что для любого $\varphi\in\Phi$ найдется ядро Ψ, для которого $\varphi+\Psi\subset\Phi$. Ограниченными в X назовем множества вида $N(U)$, где U — окрестность нуля в G, и все их

* Относительно определения ограниченности в топологических пространствах см. ([1]).

подмножества. Нетрудно видеть, что при этом X превращается в топологическую группу с заданной в ней ограниченностью, которую мы и будем называть группой характеров для G. Если группа G локально бикомпактна и ограниченными в G называются множества с бикомпактными замыканиями, мы получаем обычную топологизацию группы X, причем ограниченными в X будут лишь множества с бикомпактными замыканиями.

3. Определение 2. Множество $\widetilde{A}$ топологической абелевой группы G называется квази-выпуклой оболочкой множества $A \subset G$, если оно состоит из всех элементов a, для которых из $|\chi(A)| < {}^1/_4$ следует $|\chi(a)| < {}^1/_4$. Множество A называется квази-выпуклым, если оно совпадает со своей квази-выпуклой оболочкой. Группа G называется локально квази-выпуклой, если существует полная система квази-выпуклых окрестностей нуля, и группой с квази-выпуклой ограниченностью, если каждое ограниченное в G множество лежит в квази-выпуклом ограниченном множестве.

Пусть G — топологическая абелева группа с заданной ограниченностью. Изменим ограниченность в G, назвав ограниченными в G квази-выпуклые оболочки ограниченных множеств и их подмножества. При этом группа G превращается в группу с квази-выпуклой ограниченностью, причем топология в группе характеров не изменяется.

Лемма 1. *Пусть G — топологическая абелева группа с заданной в ней ограниченностью и X — ее группа характеров. Тогда любое множество вида $N(A)$, где A — некоторое подмножество в G, квази-выпукло в X.*

Из леммы следует, что локально бикомпактные абелевы группы локально квази-выпуклы.

4. Пусть G — топологическая абелева группа с заданной ограниченностью, X — ее группа характеров и G^* — группа характеров для X. Как известно ([3]), каждому элементу $g \in G$ соответствует элемент $g^* \in G^*$ такой, что для всех $\chi \in X$ $\chi(g) = g^*(\chi)$, причем отображение α: $g \to g^*$ является алгебраически гомоморфным.

Теорема 1. *Отображение α всегда непрерывно и ограничено. Если G — локально квази-выпуклая группа с квази-выпуклой ограниченосью, то α является открытым ограничивающим отображением G на $\alpha(G)$.*

Следствие. *Для того чтобы α было вполне изоморфным отображением группы G на G^*, необходимо и достаточно, чтобы:* 1) *G была локально квази-выпуклой группой с квази-выпуклой ограниченностью;* 2) *для любого элемента $g \in G$ существовал такой характер $\chi \in X$, что $\chi(g) \neq 0$;* 3) *для любого элемента $g^* \in G^*$ существовал такой элемент $g \in G$, что для всех $\chi \in X$ имеем $g^*(\chi) = \chi(g)$.*

Определение 3. Топологическая абелева группа с заданной в ней ограниченностью называется инволюционной, если α является вполне изоморфным отображением G на G^*.

Теорема 2. *Для того чтобы замкнутая подгруппа H инволюционной группы G была инволюционной, достаточно, чтобы:* 1) *любой характер, заданный на H, мог быть распространен на всю группу G;* 2) *подгруппа H была квази-выпукла в G.*

Теорема 3. *Пусть $\{G_\lambda; \tau_\lambda^\mu\}$, $\lambda \in \Delta$, — обратный спектр (обратная система ([4])) инволюционных групп G_λ, причем при любом λ каждый характер, заданный на подгруппе $\tau_\lambda(G)$, где G — предельная группа этого спектра, а τ_λ — проекция G на G_λ, можно распространить на всю группу G_λ. Тогда группа G инволюционна.*

Следствие. *Предельная группа обратного спектра локально бикомпактных абелевых групп, в которых ограниченными считаются множества с бикомпактным замыканием, инволюционна.*

5. Рассмотрим теперь прямой спектр $\{G_\lambda; \tau_\mu^\lambda\}$ топологических абелевых групп G_λ (см. ([5]), где это понятие определено для случая, когда группы G_λ бикомпактны). Назовем систему окрестностей нуля U_λ групп G_λ согласованной, если при $\lambda < \mu$ имеем $U_\lambda = \tau_\mu^{\lambda^{-1}} [U_\mu \cap \tau_\mu^\lambda (G_\lambda)]$. Пусть G — группа, элементами которой являются такие совокупности $x = (x_\lambda)$ элементов $x_\lambda \in G_\lambda$, что почти все $x_\lambda = e$. Введем следующим образом топологию в группу G. Пусть (U_λ) — согласованная система квази-выпуклых окрестностей нуля групп G_λ. Обозначим через $U^a(U_\lambda)$ совокупность таких элементов $x = (x_\lambda)$ группы G, что все $x_\lambda \in U_\lambda$, причем $\sum\limits_\lambda x_\lambda / U_\lambda < 1$ (определение символа x_λ / U_λ см. в ([6])), и назовем $U^a(U_\lambda)$ ядром группы G. Открытым в G назовем такое множество A, для любого элемента a которого найдется такое ядро U, что $a + U \subset A$. При таком определении G превращается в общую топологическую группу (см. ([7])). Ограниченность в G вводится согласно п. 1, как в прямую сумму с отмеченными нулями.

Рассмотрим в группе G подгруппу H, алгебраически порождаемую элементами вида $x_\lambda - \tau_\mu^\lambda x_\lambda$. Фактор-группу $\hat{G} = G / \overline{H}$ назовем предельной группой прямого спектра $\{G_\lambda; \tau_\mu^\lambda\}$. В $\hat{G}$ выполняется T_2-аксиома отделимости.

Теорема 4. *Если M — частично упорядоченное множество, конфинальное с Δ, и $\hat{G}'$ — предельная группа прямого спектра $\{G_\lambda; \tau_\mu^\lambda\}$, образованного теми группами G_λ, для которых $\lambda \in M$, то группа $\hat{G}'$ вполне изоморфна $\hat{G}$, если все гомоморфизмы τ_μ^λ ограничены.*

Теорема 5. *Если все гомоморфизмы τ_μ^λ ограничены и при $\mu > \lambda_0$ все отображения $\tau_\mu^{\lambda_0}$ являются полными изоморфизмами, то группа $\hat{G}$ вполне изоморфна G_{λ_0}.*

6. Определение 4. Прямой спектр $\{G_\lambda; \tau_\mu^\lambda\}$ локально квази-выпуклых абелевых групп называется замкнутым, если: 1) при $\lambda < \mu$ отображение τ_μ^λ является топологически изоморфным отображением группы G_λ на замкнутую в G_μ подгруппу; 2) естественное отображение группы G_λ в предельную группу $\hat{G}$ этого спектра является при любом λ топологически изоморфным отображением G_λ на замкнутую в $\hat{G}$ подгруппу.

Определение 5. Локально квази-выпуклая абелева группа G апроксимируема множеством $T = (G_\alpha)$ своих замкнутых подгрупп, если: 1) каковы бы ни были α и β, найдется такое γ, что $\{G_\alpha; G_\beta\} \subset G_\gamma$; 2) каждый элемент $g \in G$ лежит хотя бы в одной из G_α; 3) для того чтобы множество U было окрестностью нуля в G, достаточно, чтобы при любом α $U \cap G_\alpha$ было квази-выпуклой окрестностью нуля в G_α.

Теорема 6. *Пусть $\hat{G}$ — предельная группа прямого замкнутого спектра $\{G_\lambda; \tau_\mu^\lambda\}$ локально квази-выпуклых абелевых групп и τ^λ — естественное гомоморфное отображение G_λ в $\hat{G}$. Тогда группа $\hat{G}$ апроксимируема множеством $T = (\tau^\lambda(G_\lambda))$ своих подгрупп.*

Обратно, если некоторая локально квази-выпуклая абелева группа G апроксимируема множеством $T = (G_\alpha)$ своих замкнутых подгрупп, то эти подгруппы естественным образом образуют прямой спектр, предельная группа которого изоморфна группе G.

7. Теорема 7. *Пусть $\hat{G}$ — предельная группа такого прямого спектра $\{G_\lambda; \tau_\mu^\lambda\}$ локально квази-выпуклых абелевых групп G_λ, что все гомоморфизмы τ_μ^λ ограничены. Пусть X_λ — группа характеров для G_λ и π_λ^μ — гомоморфное отображение X_μ в X_λ, сопряженное*

с τ^{λ}_{μ}. *Тогда* $\{X_\lambda; \pi^{\mu}_{\lambda}\}$ *является обратным спектром групп* X_λ, *предельная группа* X *которого вполне изоморфна группе характеров для* $\hat{G}$.

Следствие. *Если в предположениях теоремы 7 имеем еще, что группы* G_λ *инволюционны, причем любой характер, заданный на* $\tau_\lambda(X)$, *где через* τ_λ *обозначена проекция* X *в* X_λ, *может быть распространен на всю группу* X_λ, *то, заменяя, согласно п. 3, ограниченность, заданную в* $\hat{G}$, *как фактор-группе* $G/\overline{H}$, *квази-выпуклой ограниченностью, мы превращаем* $\hat{G}$ *в инволюционную группу.*

Это имеет место, например, для случая, когда группы G_λ локально бикомпактны, причем ограниченными в G_λ считаются множества с бикомпактными замыканиями.

Для случая, когда группы G_λ бикомпактны, предельная группа прямого спектра была определена Г. С. Чогошвили ([8]). Существует непрерывное алгебраически изоморфное отображение построенной нами предельной группы на всюду плотную подгруппу предельной группы по Чогошвили.

Поступило
23 III 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Sze-Tsen Hu, Journ. Math. pures et appl., 28, 288 (1949). [2] Н. Я. Виленкин, Матем. сборн., 19, (61), 311 (1946). [3] Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, 1938, стр. 149. [4] С. Л. Лефшец, Алгебраическая топология, 1949, стр. 81. [5] П. С. Александров, Матем. сборн., 21, (63), 174 (1947). [6] S. Kaplan, Duke Math. Journ., 15, 650 (1948). [7] Н. Я. Виленкин, ДАН, 58, 1573 (1947). [8] Г. С. Чогошвили, ДАН, 46, 143 (1945).