Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 4

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. Д. АЛЕКСАНДРОВ

ПОВЕРХНОСТИ, ПРЕДСТАВИМЫЕ РАЗНОСТЯМИ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

1. Под поверхностью, представимой разностью выпуклых функций, — коротко, „поверхностью *ПРВ*“ — понимается поверхность, которую можно задать в декартовых координатах уравнением $z = f(x, y)$ с правой частью, являющейся разностью выпуклых функций, или, более обще, — поверхность, допускающая покрытие такими поверхностями.

Класс поверхностей *ПРВ* достаточно обширен; он содержит все выпуклые поверхности, все дважды непрерывно дифференцируемые поверхности, а также многогранники, у которых окрестности вершин однозначно проектируются на какие-либо плоскости.

Нас интересует, во-первых, внутренняя геометрия поверхностей *ПРВ* и, во-вторых, ее связь с их „внешней“ геометрией, т. е. со свойствами поверхности как фигуры в пространстве. В этом втором вопросе мы получаем результаты, охватывающие то основное, что известно для общих выпуклых поверхностей ([1], [3]).

Основной результат в первом вопросе сводится к тому, что, с точки зрения внутренней геометрии, всякая поверхность *ПРВ* есть „многообразие с ограниченной кривизной“ в том смысле, как оно было определено в ([2]). Это означает, что на всякой поверхности *ПРВ* суммы абсолютных величин избытков неперекрывающихся геодезических треугольников ограничены (понимая под избытком сумму углов минус π).

Основные понятия внутренней геометрии, как кратчайшая (геодезическая), длина, угол, площадь, кривизна, направление и поворот кривой, можно понимать так, как они определены в ([1]) для выпуклых поверхностей, за исключением понятия о кривизне. Теперь, в отличие от частного случая выпуклых поверхностей, мы сталкиваемся со знакопеременной кривизной, что требует нового ее определения; оно было дано в ([2]) и состоит в следующем.

Положительной (отрицательной) частью кривизны открытого множества G на поверхности — в обозначениях $\omega^+(G)$ $(\omega^-(G))$ — мы называем точную верхнюю границу (нижнюю границу с обратным знаком) сумм избытков неперекрывающихся треугольников, заключенных в G. Для любого M определяем $\omega^+(M) = \inf\limits_{G \supset M} \omega^+(G)$ и аналогично для ω^-. Кривизна множества M определяется как $\omega(M) = \omega^+(M) - \omega^-(M)$, величина же $\Omega(M) = \omega^+(M) + \omega^-(M)$ называется абсолютной кривизной. Для регулярной поверхности ω и Ω суть интегралы по площади, соответственно, гауссовой кривизны и ее модуля.

2. Исходным пунктом дальнейших выводов является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть поверхность ПРВ представлена в декартовых координатах уравнением* $z = g(x, y) - h(x, y)$, *где* g *и* h — *выпуклые функции. Пусть* g_n, h_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — *аналитические выпуклые функции, сходящиеся, соответственно, к* g *и* h, *а* F_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — *поверхности, задаваемые уравнениями* $z = g_n(x, y) - h_n(x, y)$.

Тогда имеют место два факта:

1) *Абсолютные кривизны поверхностей* F_n *ограничены в совокупности.*

2) *Метрики поверхностей* F_n *сходятся к метрике поверхности* F, *т. е. если* $X, Y \in F$, $X_n, Y_n \in F_n$ *и* $X_n \to X$, $Y_n \to Y$, то $\rho_{F_n}(X_n Y_n) \to \rho_F(XY)$, *где* ρ — *внутреннее расстояние на поверхности в смысле обычного определения.*

Из теоремы 1 вытекает, очевидно,

Теорема 2. *Всякая поверхность ПРВ* F *допускает приближение регулярными поверхностями, абсолютные кривизны которых ограничены в совокупности и метрики сходятся к метрике* F.

В силу основной теоремы статьи ([2]), внутренняя метрика, являющаяся пределом метрик с кривизнами, ограниченными в совокупности, сама оказывается метрикой ограниченной кривизны. Поэтому из теоремы 2 следует

Теорема 3. *Всякая поверхность ПРВ в смысле ее внутренней метрики является многообразием ограниченной кривизны. Следовательно, на ней:* 1) *между каждыми двумя исходящими из общей точки кратчайшими существует определенный угол и* 2) *суммы избытков неперекрывающихся треугольников ограничены.*

Благодаря теореме 3 все выводы о многообразиях ограниченной кривизны ([2, 4]) могут быть перенесены на поверхности.

Заметим, что после установления теоремы 2 и 3 теорему 1 можно обобщить, сняв условие аналитичности функций g_n, h_n; они могут быть любыми выпуклыми и оба утверждения теоремы 1 останутся при этом в силе.

3. Теорема 4. *Для того чтобы кривая на поверхности ПРВ имела в начальной точке определенное направление в смысле внутреннего определения* (см. ([1]) или ([4])), *необходимо и достаточно, чтобы она имела в ней касательную* (внутреннюю точку кривой всегда можно считать начальной для двух ее дуг).

Так как всякая кратчайшая (геодезическая) тривиальным образом имеет определенное направление в начальной точке и направления в обе стороны в любой внутренней точке, то из теоремы 4 следует

Теорема 5. *На всякой поверхности ПРВ геодезическая имеет в каждой точке правую и левую касательные.*

Для общих выпуклых поверхностей эта теорема была впервые в полном объеме доказана И. М. Либерманом ([3]) посредством изящного геометрического приема, который, однако, существенно основан на выпуклости поверхности. В нашем более общем случае мы совершенно иным путем получаем сразу теорему 4, используя сравнительно глубокие внутренне-геометрические выводы. Таким образом, и для выпуклых поверхностей наше доказательство оказывается новым.

Теорема 6. *Всякая поверхность ПРВ имеет в каждой точке касательный конус; этот конус является касательным к ней также в смысле внутренней метрики.*

Согласно определению, данному в ([1]), это означает следующее. Некоторая окрестность U точки A на поверхности F допускает такой гомеоморфизм h на окрестность вершины конуса K (касательного F в точке A), что: 1) $h(A)$ есть вершина K и 2) при всяком $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $\rho_F(AX) + \rho_F(AY) < \delta$

$$|\rho_F(XY) - \rho_K(h(X)h(Y))| < \varepsilon[\rho_F(AX) + \rho_F(AY)],$$

где X, Y — точки из U, а ρ_F, ρ_K — расстояния на F и K.

Теорема 7. *Угол (в смысле внутреннего определения* (1)) *между кривыми на поверхности ПРВ, исходящими из общей точки A, равен углу между их касательными, измеренному на касательном конусе в точке A.*

4. Для перенесения на общие поверхности *ПРВ* теоремы Гаусса нужно определить для них „площадь сферического изображения". Самое сферическое изображение определяется просто лишь для гладких поверхностей. В общем случае наличие ребер и конических точек усложняет дело.

Пусть поверхность F представлена уравнением $z = f(x, y)$. Сферическое изображение будем строить на полусфере S, лежащей в полупространстве $z > 0$, если центр сферы — в начале координат.

Пусть G — односвязная область на поверхности F, ограниченная простой замкнутой кривой L, не проходящей через конические точки (т. е. такие точки, где касательный конус не сводится ни к плоскости, ни к двугранному углу; таких точек на поверхности не более, чем счетное множество). Если в точке X кривой L имеется касательная плоскость, то ей естественно сопоставляется точка на полусфере S с параллельной касательной плоскостью. Если в точке X касательный конус представляет двугранный угол, то относим ей на полусфере S дугу большого круга, соединяющую концы нормалей к граням этого двугранного угла. Таким образом, кривой L сопоставляется на S некоторое множество точек $\overline{L}$. Это множество при известных условиях представляет замкнутую кривую, т. е. непрерывный образ окружности. Если при этом кривая $\overline{L}$ имеет площадь (меру), равную нулю, то ей сопоставляется „площадь ограниченной его области" аналогично общеизвестному криволинейному интегралу. Без каких бы то ни было предположений о множестве $\overline{L}$ эту „площадь" можно определить следующим образом.

Зададим обход кривой L. Берем на ней последовательные точки X_i. Каждой точке X_i отвечает точка или дуга из $\overline{L}$; во втором случае берем на такой дуге любую из ее точек. Таким образом, точкам X_i отвечают точки $\overline{X}_i$ из $\overline{L}$. Пусть O какая-либо точка полусферы S. Рассмотрим сферический треугольник $O\overline{X}_i\overline{X}_{i+1}$. Если обход такого треугольника, определенный направлением стороны $\overline{X}_i\overline{X}_{i+1}$, совпадает с данным обходом кривой L (т. е. дает с осью z винт той же ориентации), то считаем его площадь положительной, а в противном случае — отрицательной. Образуем сумму этих площадей со знаками. Если при безграничном сгущении точек на кривой L существует предел этих сумм, то принимаем его за „площадь сферического изображения" или „внешнюю кривизну" области G, ограниченной кривой L.

Теорема 8. *На всякой поверхности ПРВ площадь сферического изображения области равна ее кривизне* (в том смысле, как она определена в п. 1).

Так как не всякая область имеет определенную площадь сферического изображения (в смысле данного только что определения), то теорема 8 приобретает полное содержание в связи с леммой:

На всякой поверхности ПРВ для всякой односвязной области G_0 и заключенной в ней замкнутой области G_1 существует содержащаяся в G_0 и содержащая G_1 область G, имеющая определенную „площадь сферического изображения".

Вследствие этого, а также благодаря полной аддитивности кривизны можно определить „внешнюю кривизну" любой области G как предел „внешних кривизн" расширяющейся последовательности областей, содержащихся в G, дающих в сумме всю G и имеющих определенные площади сферического изображения. В результате можно высказать теорему.

Для всякой области на поверхности ПРВ внешняя кривизна равна внутренней.

5. В заключение отметим теорему о площади.

Теорема 9. *Площадь области на поверхности ПРВ в смысле внутреннего определения через разбиения на треугольники, данного в* ([1]) *и* ([2]), *совпадает с площадью в обычном смысле, т. е. выражается общеизвестным двойным интегралом* $\iint \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy$.

Вопрос о внешнегеометрическом смысле поворота кривой остается невыясненным до конца даже для кривых на выпуклых поверхностях.

Ленинградское отделение
Математического института
Академии наук СССР

Поступило
3 IV 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Д. Александров, Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, 1948. [2] А. Д. Александров, ДАН, **60**, № 9 (1948). [3] И. М. Либерман, ДАН, **32**, № 5 (1941). [4] А. Д. Александров, ДАН, **63**, № 4 (1948).