Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 2

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. А. ХАРКЕВИЧ

УРАВНЕНИЯ АКУСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПЕРЕДАЧИ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 3 III 1950)

§ 1. Акустической системой передачи назовем совокупность двух антенн, каждая из которых может быть как излучателем, так и приемником. Режим системы будем описывать посредством величин среднего давления и объемной скорости, полагая, что ни одна из этих величин не равна тождественно нулю. Иначе говоря, исключим пока из рассмотрения мультипольные антенны.

Мы можем записать уравнения системы передачи в следующем общем виде:

$$p_1 = c_{11}u_1 + c_{12}u_2,$$
$$p_2 = c_{21}u_1 + c_{22}u_2. \qquad (1)$$

Здесь индексы указывают, к какой из двух антенн относится данная переменная величина; коэффициенты c_{ik} мы сейчас определим.

§ 2. Положим, что антенна 1 излучает, а антенна 2 закреплена так, что $u_2 = 0$. На поверхности антенны 1 давление в результате излучения будет

$$p_{11} = Z_1 u_1.$$

Волна давления, распространяясь, достигает антенны 2, находящейся на расстоянии l. Давление при отсутствии антенны 2 было бы

$$p_{21} = p_{11} f_1(l),$$

где $f_1(l)$ — безразмерная функция координат местоположения антенны 2, зависящая от свойств антенны 1. Вследствие наличия антенны 2, ведущей себя как твердое тело, возникает дифракционное поле, в результате чего на поверхности антенны 2 получится добавочное среднее давление, отношение которого к давлению p_{21} мы обозначим через $\varphi_2(0)$. Дифракционное поле антенны 2, распространяясь обратно к 1, создает на расстоянии l относительное давление $\varphi_2(l)$. Так как скорость антенны 1 задана, то возникает дифракция снова как от твердого тела, что дает на поверхности антенны 1 добавочное давление, учитываемое множителем $\varphi_1(0)$, и т. д. Все это рассуждение наглядно представляется волновой сеткой рис. 1.

Если теперь просуммировать все слагающие среднего давления на поверхности антенны 1, то получится:

$$p_1 = p_{11}\{1 + f_1(l)\varphi_2(l)[1 + \varphi_1(0)] + f_1(l)\varphi_2^2(l)\varphi_1(l)[1 + \varphi_1(0)] + \cdots\},$$

откуда

$$c_{11} = \frac{p_1}{u_1}\Big|_{u_2=0} = Z_1\left(1 + f_1(l)\,\frac{\varphi_2(l)\,[1+\varphi_1(0)]}{1-\varphi_1(l)\,\varphi_2(l)}\right). \tag{2}$$

Суммируя аналогичным образом, получим давление на поверхности антенны 2:

$$p_2 = p_{11}\,\{f_1(l)\,[1+\varphi_2(0)] + f_1(l)\,\varphi_1(l)\varphi_2(l)\,[1+\varphi_2(0)] + \cdots\},$$

откуда

$$c_{21} = \frac{p_2}{u_1}\Big|_{u_2=0} = Z_1 f_1(l)\,\frac{1+\varphi_2(0)}{1-\varphi_1(l)\,\varphi_2(l)}. \tag{3}$$

Значения коэффициентов c_{12} и c_{22} получаются из (2) и (3) перестановкой индексов 1 и 2; уравнения (1) получают вид

$$\begin{aligned} p_1 &= Z_1\left(1 + f_1(l)\,\frac{\varphi_2(l)\,[1+\varphi_1(0)]}{1-\varphi_1(l)\,\varphi_2(l)}\right)u_1 + Z_2 f_2(l)\,\frac{1+\varphi_2(0)}{1-\varphi_1(l)\,\varphi_2(l)}\,u_2,\\ p_2 &= Z_1 f_1(l)\,\frac{1+\varphi_2(0)}{1-\varphi_1(l)\,\varphi_2(l)}\,u_1 + Z_2\left(1 + f_2(l)\,\frac{\varphi_1(l)\,[1+\varphi_2(0)]}{1-\varphi_1(l)\,\varphi_2(l)}\right)u_2. \end{aligned} \tag{4}$$

§ 3. Для применения уравнений (4) следует уточнить определения входящих в коэффициенты функций f и φ.

$f(l)$ есть отношение давления в свободном поле на расстоянии l от излучающей антенны к давлению на ее поверхности.

$\varphi(0)$ есть отношение среднего давления, возникающего вследствие дифракции на поверхности отвердевшей антенны, к давлению в свободном поле (т. е. при отсутствии антенны).

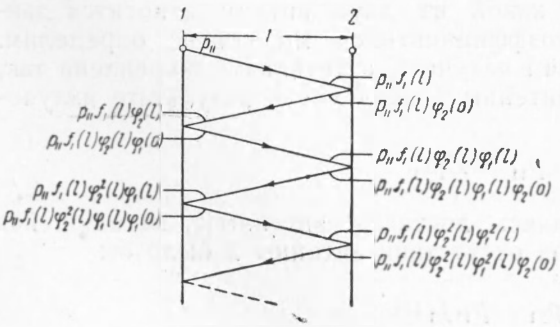

Рис. 1

$\varphi(l)$ есть отношение давления, возникающего вследствие дифракции от отвердевшей антенны на расстоянии l от нее, к давлению в свободном поле в месте расположения антенны.

Все функции f и φ для стационарного режима представляют собою функции аргумента $j\omega$ и являются, следовательно, комплексными величинами. В более общем понимании эти функции являются лапласовыми изображениями соответствующих функций времени, т. е. функциями оператора P.

Функции φ представляют собой обобщение коэффициента отражения.

Поясним эти определения на простейшем примере. Пусть система передачи состоит из двух поршней на расстоянии l друг от друга в цилиндрической трубе единичного сечения. В этом случае мы имеем

$$Z_1 = Z_2 = w;\quad f_1(l) = f_2(l) = e^{-P\frac{l}{c}};\quad \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 1;$$

$$\varphi_1(l) = \varphi_2(l) = e^{-P\frac{l}{c}}.$$

Подставляя эти значения в выражения для коэффициентов c_{ik}, получаем уравнения системы в виде

$$
\begin{aligned}
p_1 &= w \operatorname{cth} P \frac{l}{c} u_1 + \frac{w}{\operatorname{sh} P \frac{l}{c}} u_2, \\
p_2 &= \frac{w}{\operatorname{sh} P \frac{l}{c}} u_1 + w \operatorname{cth} P \frac{l}{c} u_2.
\end{aligned} \tag{5}
$$

§ 4. В качестве одного из применений найдем функцию $\varphi(0)$.

По теореме взаимности должно быть

$$c_{12} = c_{21},$$

откуда

$$Z_2 f_2(l)\,[1 + \varphi_1(0)] = Z_1 f_1(l)\,[1 + \varphi_2(0)],$$

или

$$1 + \varphi_1(0) = \frac{Z_1 f_1(l)}{Z_2 f_2(l)}\,[1 + \varphi_2(0)]. \tag{6}$$

Формула (6) выражает в общем виде соотношение, известное для частного случая под названием закона Шоттки. При помощи формулы (6) можно найти давление, возникающее в результате дифракции на поверхности антенны 1, если известны ее характеристики Z_1 и f_1 и если известны, кроме того, все характеристики произвольной вспомогательной антенны 2.

Выберем, например, как это обычно и делается, антенну 2 в форме малого шарика радиуса b (малая антенна нулевого порядка). В этом случае

$$Z_2 = \frac{w}{S_2} P \frac{b}{c}, \quad f_2(l) = \frac{b}{l} e^{-P\frac{l}{c}}, \quad \varphi_2(0) = 0.$$

Подставив это в (6), получим

$$1 + \varphi_1(0) = \frac{4\pi c l}{wP} e^{P\frac{l}{c}} Z_1 f_1(l). \tag{7}$$

Положим, что мы хотим знать среднее давление на поверхности шара радиуса a. Для такого шара

$$Z_1 = \frac{w}{S_1} \frac{P \frac{a}{c}}{1 + P \frac{a}{c}}, \quad f_1(l) = \frac{a}{l} e^{-P\frac{l-a}{c}}.$$

Подставляя в (7), находим

$$1 + \varphi_1(0) = \frac{e^{P\frac{a}{c}}}{1 + P\frac{a}{c}}.$$

(Этот же результат может быть получен классическим методом разложения решений волнового уравнения по сферическим функциям путем гораздо более громоздких выкладок.)

Поступило
6 I 1950