Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 2

ФИЗИКА

К. В. НИКОЛЬСКИЙ

УРАВНЕНИЯ КИЛЛИНГА И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ МЕТРИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 13 III 1950)

1. Пусть дано многообразие V_n, имеющее основную квадратичную форму

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta, \tag{1}$$

и пусть V_n допускает группу преобразований G, имеющую уравнения

$$x^{i'} = f_i(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_s). \tag{2}$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы функции (2) удовлетворяли уравнениям

$$g_{\alpha\beta}(x) = g_{\lambda\mu}(x')\,\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x_\alpha}\,\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x_\beta}, \tag{3}$$

где $g_{\alpha\beta}(x)$ и $g_{\lambda\mu}(x')$ — одинаковые функции.

Конечным преобразованиям (2) соответствуют бесконечно малые преобразования

$$x^{i'} = x^i + \xi^i\,\delta t \tag{4}$$

и, соответственно, уравнениям (3) — некоторая система дифференциальных уравнений, называемая уравнениями Киллинга [1].

Аналогично (3), мы можем получить системы уравнений для (4) для спиноров и тензоров различного ранга, в частности, векторов.

Пусть имеется преобразование вектора

$$A^i(x') = A^j(x)\,\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}. \tag{5}$$

Соответственно (4) и разложению

$$A^i(x') = A^i(x) + \frac{\partial A^i}{\partial x_\alpha}\,\xi^\alpha\,\delta t$$

мы получаем

$$A^i(x') = A^i(x) + \frac{\partial A^i}{\partial x_\alpha}\,\xi^\alpha\,\delta t = A^j(x)\left(\delta^i_j + \frac{\partial \xi^i}{\partial x_j}\,\delta t\right),$$

или эквивалентность уравнения (5) уравнениям

$$\frac{\partial A^i}{\partial x_\alpha}\,\xi^\alpha - A^j\,\frac{\partial \xi^i}{\partial x_j} = 0 \tag{6}$$

с точностью до членов второго порядка в параметре разложения.

Переходя от векторов к тензорам второго ранга, мы получаем

$$g_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x) + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\xi^\alpha \delta t + \ldots,$$

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x_\alpha} = \delta^\mu_\alpha + \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x_\alpha}\delta t + \ldots$$

и, подставляя эти выражения в (3), с точностью до членов второго порядка:

$$g_{\alpha\beta}(x) = g_{\mu\nu}(x)\,\delta^\mu_\alpha\,\delta^\nu_\beta + \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\rho}\xi^\rho\,\delta^\mu_\alpha\,\delta^\nu_\beta + g_{\mu\nu}\,\delta^\nu_\beta\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x_\alpha} + g_{\mu\nu}\,\delta^\mu_\alpha\frac{\partial \xi^\nu}{\partial x_\beta}\right)\delta t + \ldots$$

и, таким образом, эквивалентность уравнений (3) системе уравнений Киллинга:

$$\xi^\rho\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\rho} + g_{\mu\beta}\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x_\alpha} + g_{\alpha\nu}\frac{\partial \xi^\nu}{\partial x_\beta} = 0. \tag{7}$$

Аналогично, для какого-либо тензора второго ранга $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$ имеем:

$$\xi^\rho\frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial x_\rho} + R_{\mu\beta}\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x_\alpha} + R_{\alpha\nu}\frac{\partial \xi^\nu}{\partial x_\beta} = 0. \tag{8}$$

Для антисимметрического тензора третьего ранга $c^\alpha_{\beta\gamma}$ $(c^\alpha_{\beta\gamma} = -c^\alpha_{\gamma\beta})$ мы имеем вместо (3) уравнения

$$c^\alpha_{\beta\gamma}(x) = c^\lambda_{\mu\nu}(x')\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\beta}\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\gamma}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_\alpha}, \tag{9}$$

которые могут быть записаны в виде

$$c^\alpha_{\beta\gamma}(x')\frac{\partial x'^\beta}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x_\nu} = c^\lambda_{\mu\nu}(x)\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x_\lambda} \tag{10}$$

и которые определяют некоторые функции

$$x'_\alpha = x'_\alpha(x_1, \ldots, x_n;\ s_1, \ldots, s_r). \tag{11}$$

Пользуясь выражениями для $c^\alpha_{\beta\gamma}(x')$ и производных в виде рядов по степеням параметра t, мы получаем эквивалентную (10) систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial c^\alpha_{\beta\gamma}}{\partial x_\mu}\xi^\mu + c^\alpha_{\rho\gamma}\frac{\partial \xi^\rho}{\partial x_\beta} + c^\alpha_{\beta\nu}\frac{\partial \xi^\nu}{\partial x_\gamma} - c^\rho_{\beta\gamma}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x_\rho} = 0 \tag{12}$$

и соответствующую систему уравнений, выражающих условия интегрируемости.

Мы можем так же получать системы дифференциальных уравнений для тензоров различного ранга и для спинорных величин.

2. Если мы сделаем гипотезу, что основной метрический тензор $g_{\alpha\beta}$ может быть выражен через некоторый метрический тензор $c^\lambda_{\mu\nu}$ системой соотношений

$$g_{\alpha\beta} = c^\lambda_{\alpha\mu}\,c^\mu_{\beta\lambda}, \quad c^\lambda_{\alpha\beta} = -c^\lambda_{\beta\alpha}, \tag{13}$$

то для компонент этого антисимметрического метрического тензора мы будем иметь, во-первых, уравнения, отождествляющие уравнения Киллинга и другие уравнения для $g_{\alpha\beta}$, по подстановке вместо $g_{\alpha\beta}$

выражений (13), и, во-вторых, систему дифференциальных уравнений (12).

Естественно, что для тензора $c^{\alpha}_{\beta\gamma}$ могут быть поставлены задачи, соответствующие задачам для $g_{\alpha\beta}$ или их обобщающие. Так, мы отметим, прежде всего, вопрос об определении аналога ковариантного дифференцирования, и вопрос о соотношении между $c^{\alpha}_{\beta\gamma}$ и коэффициентами аффинной связности. Далее, большой интерес представляет исследование соотношений между $c^{\alpha}_{\beta\gamma}$ и векторными полями, связанными с главными направлениями Риччи ([2]) *; наконец, имеет значение вопрос о вариационной трактовке задачи.

Таким образом, мы получаем возможность построения единой теории поля, пользующейся антисимметрическим тензором третьего ранга как основным метрическим.

Физический институт
им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступило
9 III 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] L. P. Eisenhart, Continuous Groups of Transformations, Princeton, 1933; русск. пер. Л. П. Эйзенхарт, Непрерывные группы преобразований, М., 1947 (ср. в особенности гл. V). [2] L. P. Eisenhart, Ann. of Math., 36, Oct., 823 (1936).

* Представляет интерес также исследование возможности обобщения, аналогичного переходу, исследованному Эйзенгартом ([2]), от уравнений (5) к уравнению

$$A^{i}_{\sigma}(x') = \tau^{\tau}_{\sigma}(x')\, A^{j}_{\tau}(x) \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{j}},$$

вводящему неопределенность направлений Риччи или вращения.