Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Д. М. ВОЛКОВ

ВТОРОЙ ИНТЕГРАЛ ТИПА ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 14 III 1950)

Рассматривается случай полного отражения электромагнитных волн, распространяющихся в пустой конечной области D произвольной формы, от металлической поверхности S, ограничивающей данную область (электромагнитное поле E, H внутри D удовлетворяет классическим уравнениям Максвелла в пустоте, а поверхность S имеет идеальную проводимость).

В данном случае, кроме классического интеграла энергии:

$$\mathcal{E}_1 = \iiint_D (\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{H}^2)\, dx_1\, dx_2\, dx_3, \tag{1}$$

можно выписать также следующий второй интеграл:

$$\mathcal{E}_2 = \iiint_D \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \left(\left| \frac{\partial E_i}{\partial x_k} \right|^2 + \left| \frac{\partial H_i}{\partial x_k} \right|^2 \right) dx_1\, dx_2\, dx_3 + \\ + \iint_S \left(k\, |E|^2 + \sum_{j=1}^{2} k_j\, |H_j^*|^2 \right) ds. \tag{2}$$

Здесь E_1, E_2, E_3, H_1, H_2 H_3 — проекции поля E, H на декартовы прямоугольные оси x_1, x_2, x_3. Чтобы объяснить другие символы, поместим начало координат декартовой системы в произвольную точку O^* поверхности S (точку интегрирования), ось $\bar{x}_3$ направим по внешней нормали к S, оси $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ — в касательной плоскости перпендикулярно друг другу (например, по направлению линий главной кривизны). Тогда k_j — кривизна сечения S плоскостью $\bar{x}_3\ \bar{x}_j$, именно, если функция $\bar{x}_3 = \bar{x}_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ дает локальное уравнение поверхности S (эта функция, по предположению, имеет непрерывные производные до второго порядка включительно в конечной окрестности каждой точки O^*), то $k_j = -\partial \bar{x}_3 / \partial \bar{x}_j$, вычисленной в начале координат O^*; $k = k_1 + k_2$ — средняя кривизна; H_1^*, H_2^*, H_3^*, E_1^*, E_2^*, E_3^* — проекции поля H, E на оси $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$.

Если область распространения электромагнитных волн D бесконечна (имеет также металлическую границу, состоящую, может быть, из конечного числа ограниченных замкнутых поверхностей), то на электромагнитное поле налагается условие, что оно в бесконечности имеет затухание порядка $1/r$, а для первых производных порядка $1/r^2$

(r — расстояние точки вычисления от начала координат). Формула (2) и в этом случае определяет конечную величину $\mathcal{E}_2$, не зависящую от времени.

Отметим, что $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ являются независимыми константами задачи, в частности, начальное возмущение можно менять так, что $\mathcal{E}_1$ остается фиксированной, а $\mathcal{E}_2$ будет изменяться по произволу.

Соответствующая постоянная $\mathcal{E}_2$ существует (математически найдена) и в других процессах, например, в линейных задачах динамической теории упругости, в краевых задачах для волнового уравнения (см. [1]), для системы обыкновенных уравнений и т. д.

Поступило
13 II 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, ДАН, 48, № 8 (1945).