Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Ю. А. СУРИНОВ

О НЕКОТОРЫХ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЯХ ТЕОРИИ ПОЛЯ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 III 1950)

Введение. Теория теплового излучения (или макроскопическая (феноменологическая) кинетика излучения), изучающая неравновесные состояния излучающих систем, характеризующиеся произвольными полями температур и оптических констант, подобно теоретической гидромеханике или классической механике твердого тела, является математической наукой. Фундаментальным базисом теории теплового излучения являются, наряду с ее аксиоматикой, интегральные уравнения излучения, связывающие соответствующее число задаваемых (определяющих) полей с определяемым полем плотности того или иного вида излучения. Вследствие этого интегральные уравнения излучения можно рассматривать как уравнения состояния неравновесных излучающих систем.

Разнообразие математических методов, используемых в теории теплового излучения (опирающихся на теорию меры множеств, функциональный анализ и уравнения математической физики, теорию вероятностей, теорию поля (векторный и тензорный анализ), интегральную и дифференциальную геометрию, различного рода специальные функции и т. д.) обусловливается существом и характером ее проблем, неизмеримо более общих и сложных, чем чисто термодинамические, относящиеся к равновесным состояниям и процессам*, а также многообразием ее применений в различных областях техники и физики и, прежде всего, в теплотехнике, астрофизике, геофизике, светотехнике, гелиотехнике, физике моря, в которых задачи о лучистом обмене занимают выдающееся место.

Постановка задачи. Ниже приводится вывод некоторых основных дифференциальных и интегральных уравнений теплового излучения для случая неподвижной системы излучающих серых тел, разделенных диатермической средой. Излучающую систему полагаем замкнутой, ограниченной поверхностью типа Ляпунова, имеющей произвольную заданную конфигурацию. Поля температур и оптических констант по поверхности системы принимаются непрерывными.

Дифференциальные уравнения. Наиболее детальным дифференциальным уравнением теории теплового излучения, определяющим законы распределения яркостей $B(M, s, \tau)$ по направлениям, является уравнение переноса лучистой энергии [2], которое для диатермической среды и нестационарного поля излучения имеет вид:

$$\frac{DB(M, s, \tau)}{ds} = \frac{\partial B(M, s, \tau)}{\partial s} + \frac{1}{c}\frac{\partial B(M, s, \tau)}{\partial \tau} = 0, \quad (1)$$

где $c = ds/d\tau$ — скорость распространения лучистой энергии.

* Анализ подобных процессов см., например, [1].

Интегрируя это уравнение почленно скалярно по телесному углу $\omega = 4\pi$, находим:

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_{4\pi}(M, \tau) + \frac{\partial u(M, \tau)}{\partial \tau} = 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{E}_{4\pi}(M, \tau)$ — сферический вектор излучения, представляющий векторную функцию точки M и времени τ. Его направление соответствует направлению наиболее интенсивного результативного переноса лучистой энергии:

$$\mathbf{E}_{4\pi}(M, \tau) = \int\limits_{(4\pi)} B(M, s, \tau)\, \overrightarrow{d\omega}(M, s); \tag{3}$$

$u(M, \tau)$ — объемная плотность лучистой энергии:

$$u(M, \tau) = \frac{1}{c} \int\limits_{(4\pi)} B(M, s, \tau)\, d\omega(M, s) \tag{4}$$

и $\overrightarrow{d\omega}(M, s)$ — элементарный вектор телесного угла ([3]):

$$\overrightarrow{d\omega}(M, s) = \frac{\mathbf{dF}_n}{r_{MN}^2} = \mathbf{r}_1 \frac{dF_n}{r_{MN}^2} = \mathbf{r}_1 \frac{\cos\theta_N}{r_{MN}^2} dF_N = \mathbf{r}_1 d\omega(M, s), \tag{5}$$

где $\mathbf{r}_1$ — единичный вектор по направлению луча s; r_{MN} — расстояние между точками M и N на луче s; $\mathbf{dF}_n$ — векторный элемент поверхности в точке N с направлением $\mathbf{r}_1$; θ_N — угол между направлением нормали к площадке dF_N в граничной точке N и направлением s.

В случае стационарного поля, очевидно, имеем:

$$\frac{\partial B(M, s)}{\partial \tau} = \frac{\partial B(M, s)}{\partial s} \equiv 0; \tag{6}$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial \tau} = \operatorname{div} \mathbf{E}_{4\pi}(M) \equiv 0. \tag{7}$$

Интегральные соотношения для стационарного и диатермического поля излучения. Учитывая, что в рассматриваемом случае яркость излучения во внутренних точках поля является лишь функцией направления s и не зависит от точки и что для граничных серых тел, в силу закона Ламберта, яркость, наоборот, является лишь функцией точки на поверхности системы и не зависит от направления, получаем, как следствие этих двух законов, соотношение: $B(M, s) = B_{эф}(N) = E_{эф}(N)/\pi$. Следовательно, имеем

$$\mathbf{E}_{4\pi}(M) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{(4\pi)} E_{эф}(N)\, \overrightarrow{d\omega}(M, s) = \int\limits_{(4\pi)} E_{эф}(N)\, \overrightarrow{d\varphi}(M, s), \tag{8}$$

где $\overrightarrow{d\varphi}(M, s) = \frac{1}{\pi} \overrightarrow{d\omega}(M, s)$ — элементарный геометрический вектор излучения и $E_{эф} = AE_0 + RE_{пад}$ — плотность полусферического эффективного излучения ([4]).

Введем, далее, новое понятие полусферического вектора излучения $\mathbf{E}_{2\pi}$, который определим как векторный интеграл от яркости $B(M, s)$ по телесному углу $\omega = 2\pi$:

$$\mathbf{E}_{2\pi}(M, n) = \int\limits_{(2\pi)} B(M, s)\, \overrightarrow{d\omega}(M, s), \tag{9}$$

или

$$\mathbf{E}_{2\pi}(M, n) = \int\limits_{(2\pi)} E_{эф}(N)\, \overrightarrow{d\varphi}(M, s) = \int\limits_{F'(M, n)} E_{эф}(N)\, \mathbf{r}_1 \frac{\cos\theta_N}{\pi r_{MN}^2} dF_N. \tag{10}$$

Как явствует из (9) и (10), вектор $\mathbf{E}_{2\pi}(M, n)$ является функцией точки M и направления нормали n к площадке dF_M в этой точке.

Весьма важно отметить, что в то время как проекция сферического вектора $\mathbf{E}_{4\pi}(M)$ на произвольное направление n, проходящее через данную точку M, представляет плотность результативного излучения, проходящего через площадку dF_M, ориентированную нормально к направлению n:

$$E_{рез}(M, n) = (\mathbf{E}_{4\pi}, \mathbf{n}_1) = \int\limits_{(4\pi)} E_{эф}(N)\, d\varphi_n(M, N), \quad M \in \mathfrak{A}_v, \tag{11}$$

проекция полусферического вектора $\mathbf{E}_{2\pi}(M, n)$ на направление n, которым данный вектор определяется, есть не что иное, как плотность падающего полусферического излучения $E_{пад}(M, n)$:

$$E_{пад}(M, n) = (\mathbf{E}_{2\pi}, \mathbf{n}_1) = \int\limits_{(2\pi)} E_{эф}(N)\, d\varphi_n(M, N), \quad M \in \mathfrak{A}_v, \tag{12}$$

где $\mathbf{n}_1$ — единичный вектор нормали к площадке dF_M в точке M и $d\varphi_n(M, N) = (\overrightarrow{d\varphi_1}, \mathbf{n}_1) = K(M, N)\, dF_N$ — проекция элементарного геометрического вектора $\overrightarrow{d\varphi}(M, s)$ на направление нормали n к данной площадке, представляющая элементарный угловой коэффициент излучения (4). Интегралы в (11) и (12) распространены по мере множества лучей и являются интегралами Лебега — Стильтьеса. Заметим, что вектор $\mathbf{E}_{4\pi}$ может быть представлен для любого направления n как геометрическая сумма двух соответствующих полусферических векторов излучения $\mathbf{E}_{4\pi}(M) = \mathbf{E}_{2\pi}^{+}(M, n) + \mathbf{E}_{2\pi}^{-}(M, n)$, $M \in \mathfrak{A}_v$. В случае граничных точек $M \in \mathfrak{A}_F$ соответственно имеем: $\mathbf{E}_{4\pi}(M) = \mathbf{E}_{2\pi}(M) + \mathbf{n}_1 E_{эф}(M)$.

Аналогично получаем разложение и для $E_{рез}$ (4):

$$E_{рез}(M, n) = E_{пад}^{+}(M, n) - E_{пад}^{-}(M, n), \quad M \in \mathfrak{A}_v; \tag{13}$$

$$E_{рез}(M) = E_{пад}(M) - E_{эф}(M) = A(M)\,[E_{пад}(M) - E_0(M)], \quad M \in \mathfrak{A}_F. \tag{14}$$

Интегральные уравнения для стационарного поля теплового излучения легко вывести на основании классификации видов излучения (4). Рассматривая основную постановку объемной задачи, когда заданными являются: конфигурация системы, поля температур и оптических констант и требуется определить распределение плотностей различных видов излучения как по граничной поверхности, так и по ее объему *, находим:

$$E_{пад}(M, n) - \int\limits_{F'(M,n)} R(N)\, E_{пад}(N)\, K(M, N)\, dF_N =$$
$$= \int\limits_{F'(M,n)} A(N)\, E_0(N)\, K(M, N)\, dF_N, \quad M \in \mathfrak{A}_v, \quad N \in \mathfrak{A}_F; \tag{15}$$

$$E_{рез}(M, n) - \int\limits_{(F)} \frac{R(N)}{A(N)}\, E_{рез}(N)\, K(M, N)\, dF_N = \int\limits_{(F)} E_0(N)\, K(M, N)\, dF_N,$$
$$M \in \mathfrak{A}_v, \quad N \in \mathfrak{A}_F. \tag{16}$$

В уравнении (15) интегрирование распространяется на переменную область $F'(M, n)$, зависящую от расположения (M) и ориентации (n) площадки dF_M и соответствующую полусферическому телесному углу $\omega = 2\pi$. В уравнении (16) интегрирование ведется по всей поверхности F системы **.

---

* Рассматривавшиеся до сих пор в литературе задачи о лучистом обмене в системах серых тел, разделенных диатермической средой, сводились к определению лишь граничных (поверхностных) распределений плотностей соответствующих видов излучения (4).

** Если $E_{пад}$ определяется только на границе системы, областью интеграции в уравнении (15) будет вся поверхность F системы (4).

Рассмотрим, далее, вторую постановку задачи, которая отличается от первой тем, что вместо температурного поля на границе задается поле плотностей результативного излучения $E_{рез}$ *. Получаем:

$$E_{пад}(M, n) - \int\limits_{F'(M,n)} E_{пад}(N) K(M, N) dF_N =$$

$$= - \int\limits_{F'(M,n)} E_{рез}(N) K(M, N) dF_N, \quad M \in \mathfrak{A}_v, \quad N \in \mathfrak{A}_F; \tag{17}$$

$$E_{эф}(M) - \int\limits_{(F)} E_{эф}(N) K(M, N) dF_N = - E_{рез}(M), \quad M \in \mathfrak{A}_F, \quad N \in \mathfrak{A}_F. \tag{18}$$

Если уравнение (17) рассматривать как двумерное, определяющее поле значений $E_{пад}$ только по поверхности F системы, то оно будет эквивалентным интегральному уравнению (18). Легко видеть, что эти уравнения не имеют единственного решения. Это следует из того, что соответствующие им однородные интегральные уравнения имеют фундаментальные функции (нетривиальные решения). В частности, однородное уравнение для (18) имеет вид:

$$E_{эф}(M) - \int\limits_{(F)} E_{эф}(N) K(M, N) dF_N = 0. \tag{19}$$

Физически это уравнение, очевидно, будет характеризовать случай термодинамического равновесия системы. Его нетривиальное решение будет иметь следующий вид: $E_{эф} = E_0 = C_0 (T/100)^4 = \text{const}$, где T — абсолютная температура.

Существование решений уравнений (18) и (17) на основании третьей теоремы Фредгольма ([5]) вытекает из следующего условия ортогональности (имеющего, в силу (19), вырожденный характер):

$$\oint\limits_{(F)} E_{рез}(M)\, dF_M = \oint\limits_{(F)} (\mathbf{E}_{4\pi}, \mathbf{n}_1)\, dF_M = 0, \tag{20}$$

которое для замкнутой излучающей системы всегда выполняется, так как, будучи для диатермического и стационарного (соленоидального) поля выражением теоремы Остроградского, оно является, таким образом, следствием закона сохранения энергии.

В заключение заметим, что при переходе от кинетики к термодинамике лучистой энергии в связи с вырождением поля излучения в равновесное состояние и его характеристик в параметры состояния, сохраняющие постоянные значения для всех точек системы, теория настолько упрощается, что ее аналитические методы почти полностью утрачивают свое значение. Действительно, в случае термодинамического равновесия интегральные и дифференциальные уравнения излучения вырождаются в тождества. Значительно сокращается число видов излучения и утрачивают смысл различные постановки задачи о лучистом обмене. Векторные представления, однако, еще находят при этом частичное применение вследствие динамического характера термодинамического лучистого равновесия. Отметим в связи с этим, что векторные представления, естественно, совершенно неприменимы в термодинамике материальных тел.

Поступило
17 II 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Планк, Теория теплового излучения, 1935. [2] Е. С. Кузнецов, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 1 (1941). [3] А. А. Гершун, Световое поле, 1936. [4] Ю. А. Суринов, Изв. АН СССР, ОТН, № 7 (1948). [5] И. Г. Петровский, Теория интегральных уравнений, 1948.

* Здесь также рассматривается обобщенная постановка объемной задачи.