Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 3

МАТЕМАТИКА

В. Е. СЛИВИНСКИЙ

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ ПЕРЕМЕННЫХ ЗОЛОТАРЕВА — КРЫЛОВА

(Представлено академиком Н. М. Крыловым 25 III 1950)

В 1947 г. Н. М. Крылов опубликовал работу [1], в которой им были построены аналитические функции от переменных вида

$$\alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 i^2 + \cdots + \alpha_{n-1} i^{n-1}, \tag{1}$$

где i — корень некоторого алгебраического уравнения степени n. Данное исследование, в котором решается задача обобщения некоторых вопросов теории аналитических функций, выполнено в развитие идей Н. М. Крылова и работ Е. И. Золотарева [2] и И. А. Лаппо-Данилевского [3].

Рассмотрим квадратную матрицу X, характеристическое уравнение которой примем в виде

$$\omega^n = p_0 + p_1 \omega + \cdots + p_{n-1} \omega^{n-1}, \tag{2}$$

где $p_0, \ldots, p_{n-1}$ — постоянные вещественные числа.

По теореме Гамильтона — Кели матрица X удовлетворяет уравнению (2):

$$X^n = p_0 E + p_1 X + \cdots + p_{n-1} X^{n-1}; \tag{3}$$

рассмотрим комплексную матрицу

$$Z = x_0 E + x_1 X + \cdots + x_{n-1} X^{n-1}, \tag{4}$$

где E — единичная матрица, а $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ — вещественные числа.

Комплексные матрицы (4) перестановочны и могут трактоваться как обобщенные комплексные числа Золотарева — Крылова

$$z = x_0 + x_1 \omega + \cdots + x_{n-1} \omega^{n-1}, \tag{5}$$

с которыми они совпадают тождественно в случае $X = Ex$. В частном случае, если $n = 2$, $p_0 = -1$ и $p_1 = 0$, получаем обыкновенные комплексные числа.

Если ω_k — характеристические числа матрицы X, то комплексные числа

$$\bar{z}_k = x_0 + x_1 \omega_k + \cdots + x_{n-1} \omega_k^{n-1} \tag{6}$$

называются, по Золотареву, сопряженными.

Произведение сопряженных комплексных чисел

$$\prod_{k=1}^{n} \bar{z}_k = N(z) \tag{7}$$

называется нормой комплексного числа (5).

Легко показать ([6]), что норма $N(z)$ равна определителю матрицы (4); этот определитель, которому можно придать вид

$$N(z) = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot x_{n-1} \\ p_0 x_{n-1} & x_0 + p_1 x_{n-1} \;\cdot\cdot\cdot\; x_{n-2} + p_{n-1} x_{n-1} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{8}$$

$$a_{ik} = a_{i-1,\,k-1} + p_{k-1} a_{i-1,\,n},$$

называется также нормой комплексной матрицы (4). Две комплексные матрицы (4) будут равны, если норма их разности равна нулю.

Теорема 1. *Равенство нулю нормы $N(z)$ есть необходимое и достаточное условие равенства нулю комплексной матрицы* (4) *или комплексного числа* (5). *Таким образом, если трактовать коэффициенты $x_0, \ldots, x_{n-1}$ как координаты точки в n-мерном пространстве, то уравнение $N(z) = 0$ определяет гиперповерхность нулевых комплексных чисел Золотарева — Крылова; эта поверхность для обычных комплексных чисел вырождается в точку* (0,0).

Далее устанавливаются правила действия с комплексными матрицами:

$$Z_1 \pm Z_2 = \sum_{k=0}^{n-1} (x'_k \pm x''_k) X^k, \tag{9}$$

$$Z_1 Z_2 = Z_2 Z_1 = \sum_{k=0}^{n-1} y_k X^k, \tag{10}$$

$$EZ^{-1} = \frac{1}{N(z)} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k+1} \frac{\partial N(z)}{\partial a_{k1}} X^{k-1}, \quad N(z) \neq 0. \tag{11}$$

Метрика n-мерного пространства комплексных чисел (5) определяется условием $N(z) = 1$. Расстояние между двумя точками z' и z'' этого пространства, определяемое формулой

$$R(z', z'') = \left[N\left(\sum_{k=0}^{n-1} |x'_k - x''_k| \omega^k \right) \right]^{1/n}, \tag{12}$$

как легко видеть, удовлетворяет трем основным аксиомам метризации.

Функцию комплексной матрицы (4) мы определим аналогично определению Н. М. Крылова:

$$W = u_0 E + u_1 X + \cdots + u_{n-1} X^{n-1}, \tag{13}$$

где $u_0, \ldots, u_{n-1}$ — однозначные, непрерывные и дифференцируемые функции переменных $x_0, \ldots, x_{n-1}$.

Теорема 2. *Необходимые и достаточные условия моногенности функций* (13) *имеют следующий вид:*

$$N\left(\sum_{k=0}^{n-1} X^k \theta_k^{(h)}\left(p_i \left| \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu}\right.\right)\right)=0 \quad (i, \mu, \nu=0, 1, \ldots, n-1; h=1, 2, \ldots, n-1), \qquad (14)$$

где функции $\theta_k^{(h)}$ *получаются в результате исключения матриц* X^m $(m=0, 1, \ldots, n-1)$ *из системы уравнений, выражающих независимость производной от способа приближения* Δz *к нулю и уравнения* (3).

Как следствие получаем достаточные условия моногенности

$$\theta_k^{(h)}\left(p_i \left| \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu}\right.\right)=0, \qquad (15)$$

по существу совпадающие с условиями моногенности Н. М. Крылова [1].

Аналогом уравнения Лапласа в теории функций комплексного переменного Золотарева — Крылова будет

$$N\left(\lambda \frac{\partial}{\partial x_0}+\sum_{k=1}^{n-1} \omega^k \frac{\partial}{\partial x_k}\right) \varphi=0, \quad \lambda=\lambda(p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}). \qquad (16)$$

Функцию $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$, удовлетворяющую уравнению (16), назовем обобщенной гармонической функцией.

Рассматриваются линейные дифференциальные операторы

$$\delta_k=\sum_{i=1}^{n} A_{ik} \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad A_{ik}=A_{ik}(p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}). \qquad (17)$$

При помощи операторов (17) дифференциальные уравнения типа (16) приводятся к виду

$$\prod_{k=1}^{n} \delta_k \varphi=0; \qquad (18)$$

это преобразование в значительной мере облегчает интегрирование уравнений типа (16).

Например, обобщенное уравнение Лапласа в случае $n=2$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+p_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}-p_0 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad (19)$$

а при помощи операторов (18) уравнение (19) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}_1 \partial \bar{z}_2}=0. \qquad (20)$$

Функции вида (14) можно определить, как это делается в работе [3], целыми рядами

$$f(Z)=\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \sum_{k=0}^{n-1} \vartheta_k^{(h)}(p_i \mid x_j) X^k. \qquad (21)$$

Легко устанавливаются условия их сходимости. Для сходящихся рядов (21) получаются аналоги формулы Эйлера

$$e^Z=\sum_{k=0}^{n-1} X^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \vartheta_k^{(m)} \qquad (22)$$

и формулы Сильвестера.

Существование интеграла

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{\mu=0}^{n-1} \omega^{\mu} \int_C \sum_{k=0}^{n-1} v_k(x_\lambda \mid p_\nu)\,dx_k \quad (\lambda,\ \mu = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{23}$$

и независимость его от пути интегрирования являются следствием условий моногенности (14).

Если рассмотреть интеграл, определяющий функцию $L_n(z)$, то легко показать, что имеет место формула

$$L_n(z) = \int_1^z \frac{dz}{z} =$$

$$= \frac{\ln N(z)}{n} + \int_1^z \frac{1}{nN(z)} \sum_{\mu=0}^{n-1} \omega^{\mu} Q_\mu (x_i \mid p_k)\,dx_\nu \quad (i, k, \nu = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Итак, мы приходим к следующему выводу: изложенное в этой работе обобщение в форме Золотарева — Крылова комплексных чисел и аналитических функций от них является естественным продолжением работ Н. М. Крылова, Е. И. Золотарева и И. А. Лаппо-Данилевского; важность этого обобщения диктуется сохранением коммутативности умножения и однозначности деления (на комплексное число, отличное от нуля) для комплексов типа (4) или (5).

Ташкентский институт инженеров
железнодорожного транспорта

Поступило
13 II 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. М. Крылов, ДАН, 55, № 8 (1947). [2] Е. И. Золотарев, Теория целых комплексных чисел, Полн. собр. соч., в. 1, Л., 1931. [3] И. А. Лаппо-Данилевский, Теория функций от матриц и системы линейных дифференциальных уравнений, М.— Л., 1934. [4] А. С. Мейлихзон, ДАН, 58, № 6 (1947). [5] В. Е. Сливинский, Тр. ТашИИТ, в. 2 (1949). [6] В. Е. Сливинский. Диссертация, АН УзССР, 1949.