Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 3

МАТЕМАТИКА

Н. Ф. РЖЕХИНА

К ТЕОРИИ ПОЛЯ ЛОКАЛЬНЫХ КРИВЫХ В X_n

(Представлено академиком И. Г. Петровским 30 III 1950)

1. Рассмотрим в n-мерном центрально-аффинном пространстве E_n кривую

$$x^\alpha = l^\alpha(\eta) \quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ i = 1,\ \ldots,\ n), \tag{1}$$

с которой сопоставляется одномерное пространство X_1 с точечной координатой η. Можно предположить, что кривая (1) не лежит в гиперплоскости, проходящей через центр E_n, ибо иначе геометрия такой кривой совпадает с геометрией кривой в $(n-1)$-мерном центрально-аффинном пространстве. При этом предположении вектор l^α и его первые $n-1$ производные по η образуют n независимых векторов, отсюда следуют соотношения:

$$\frac{d^n l^\alpha}{d\eta^n} + \Omega^1 \frac{d^{n-1} l^\alpha}{d\eta^{n-1}} + \ldots + \Omega^{n-1} \frac{dl^\alpha}{d\eta} + \Omega^n l^\alpha = 0. \tag{2}$$

При преобразовании $'\eta = f(\eta)$ параметра совокупность функций $\Omega^1, \ldots, \Omega^n$ преобразуется как n-компонентный дифференциально-геометрический объект класса n в пространстве X_1, сопоставленном с кривой (1). Этот объект инвариантно связан с кривой и, в свою очередь, определяет кривую в E_n с точностью до автоморфизмов, т. е. центрально-аффинных преобразований пространства E_n.

Однако первая компонента Ω^1 объекта Ω^i сама определяет однокомпонентный дифференциально-геометрический объект; именно, $\gamma = \frac{2}{n(n-1)} \Omega^1$ есть объект аффинной связности в X_1. Используя γ для ковариантного дифференцирования плотностей в X_1, можно переписать соотношения (2) в следующем виде:

$$\nabla^n l^\alpha + \overset{(2)}{w} \nabla^{n-2} l^\alpha + \ldots + \overset{(n-1)}{w} \nabla l^\alpha + \overset{(n)}{w} l^\alpha = 0, \tag{3}$$

где ∇ — оператор ковариантного дифференцирования относительно объекта γ и $\overset{(2)}{w}, \ldots, \overset{(n)}{w}$ — плотности в X_1 веса $2, \ldots, n$ соответственно. Эти плотности являются дифференциальными комитантами объекта Ω^i, т. е. функциями от этого объекта и его дифференциального продолжения, и обратно, объект Ω^i есть совместный дифференциальный комитант от $\gamma, \overset{(2)}{w}, \ldots, \overset{(n)}{w}$. Отсюда: заданием объекта γ и $n-1$ плотностей $\overset{(2)}{w}, \ldots, \overset{(n)}{w}$ кривая (1) определена с точностью до автоморфизмов пространства E_n.

С помощью одной из плотностей $\overset{(2)}{w}, \ldots, \overset{(n)}{w}$ (для определенности — наибольшего веса отличной от нуля) можно ввести центрально-аффинную дугу кривой и построить полную систему инвариантов кривой — центрально-аффинные кривизны. Например, если $\overset{(n)}{w} \neq 0$, то центрально-аффинная дуга s и центрально-аффинные кривизны $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-1}$ кривой определяются соотношениями:

$$s = \int g\, d\eta, \quad \varkappa_1 = \frac{\nabla \left| \overset{(n)}{w} \right|}{g^{n+1}}, \quad \varkappa_2 = \frac{\overset{(2)}{w}}{g^2}, \; \ldots, \; \varkappa_{n-1} = \frac{\overset{(n-1)}{w}}{g^{n-1}} \quad \left(g = \left| \overset{(n)}{w} \right|^{1/n} \right). \tag{4}$$

Заданием центрально-аффинных кривизн как функций от центрально-аффинной дуги s кривая определена с точностью до автоморфизмов пространства E_n.

Центрально-аффинная геометрия кривой в E_n, расположенной в гиперплоскости, не проходящей через центр E_n, совпадает с геометрией кривой в $(n-1)$-мерном аффинном пространстве. Так как при $\overset{(n)}{w} = 0$ кривая в E_n лежит в гиперплоскости, не проходящей через центр E_n, то на указанном пути получается одновременно теория кривых в общем аффинном пространстве.

2. Пусть в каждом локальном касательном E_n пространства X_n задана некоторая кривая; мы получаем поле локальных кривых, определяемое уравнениями $x^\alpha = l^\alpha(\xi^\beta;\ \eta)$. Ограничимся в дальнейшем случаем, когда ни одна кривая поля не лежит в гиперплоскости, проходящей через центр локального касательного E_n, и, кроме того, положим $n > 3$, ибо для $n = 2$ геометрия поля локальных кривых соответствует двумерной геометрии Финслера, а для $n = 3$ теория поля локальных кривых построена В. Б. Вагнером ([1]).

. Теперь с каждой точкой пространства X_n ассоциируется некоторое X_1 (соответствующее локальной кривой поля), поэтому задание поля локальных кривых определяет составное многообразие $X_{n+(1)}$ ([2]). Определяя для каждой локальной кривой объекты $\gamma, \overset{(2)}{w}, \ldots, \overset{(n)}{w}$, получим поля локальных дифференциально-геометрических объектов в составном многообразии $X_{n+(1)}$. Точно так же поля локальных дифференциально-геометрических объектов образуют компоненты векторов $\nabla^a l^\gamma$ $(a, b, c = 0, 1, \ldots, n-1,\ \Delta^0 l^\gamma = l^\gamma)$ и векторов $\overset{a}{l}_\gamma$, взаимных к предыдущим.

В составном многообразии $X_{n+(1)}$ вводим линейную связность, относительно которой будем производить операцию базисного абсолютного дифференцирования ([1]). Используя независимость векторов $\overset{a}{l}_\gamma$, получаем разложения

$$D_{[\beta} \overset{a}{l}_{\gamma]} = \overset{a}{\underset{bc}{I}} \overset{a}{l}_{[\beta} \overset{b}{l}_{\gamma]} \quad \left(\overset{a}{\underset{bc}{I}} = - \overset{a}{\underset{cb}{I}} \right), \tag{5}$$

в которых коэффициенты $\overset{a}{\underset{bc}{I}}$ являются локальными плотностями веса $b + c - a$ соответственно. Можно показать, что связность в составном многообразии $X_{n+(1)}$ инвариантно определяется полем локальных кривых, если потребовать выполнение условий:

$$\overset{h}{\underset{h-2,\, k-1}{I}} = 0 \ (k = 2, \ldots, n-1), \qquad \overset{n-2}{\underset{n-3,\, n-1}{I}} = 0, \qquad \overset{n-1}{\underset{n-3,\, n-1}{I}} = 0. \tag{6}$$

Обозначим через R_{ab} коэффициенты в разложении объекта кривизны ([3]) связности по бивекторам $\overset{a}{l}_{[\beta} \overset{b}{l}_{\gamma]}$. Используя тождество Вагнера (([1]), стр. 291) и обобщенное тождество Риччи, устанавливаем, что все плотности R_{ab} и $\overset{a}{\underset{bc}{I}}$ $(a < n-1)$ являются целыми рациональными функциями от плотностей

$$\overset{n-1}{\underset{ab}{I}},\quad \overset{(2)}{w},\ \ldots,\ \overset{(n)}{w},\quad \underset{c}{D}\gamma \quad \left(\underset{c}{D} = \nabla^c l^\beta D_\beta\right) \tag{7}$$

и получающихся из них с помощью применения операторов ∇ и $\underset{a}{D}$.

3. Два поля локальных кривых называются эквивалентными, если преобразованием переменных

$$^*\xi^\alpha = f^\alpha(\xi^\beta), \quad ^*x^\alpha = \frac{\partial f^\alpha}{\partial \xi^\beta}, \quad ^*\eta = f(\xi^\alpha, \eta) \tag{8}$$

можно достигнуть совпадения уравнений одного поля в новых переменных с уравнениями другого поля в старых переменных. Если среди плотностей

$$\overset{(2)}{w},\ \ldots,\ \overset{(n)}{w},\quad \underset{a}{D}\gamma,\quad \overset{n-1}{\underset{ab}{I}}\ \ (a+b \neq n-1),\quad \Delta \overset{n-1}{\underset{ab}{I}}\ \ (a+b = n-1),$$
$$\underset{a}{D}\overset{n-1}{\underset{bc}{I}}\ \ (b+c = n-1,\ a > 0) \tag{9}$$

существует хотя бы одна отличная от нуля, то, возводя ее в соответствующую степень, получаем отличную от нуля плотность ν веса 1 и, вслед затем, инвариантные формы Пфаффа

$$\omega_0 = l_\alpha d\xi^\alpha, \quad \omega_1 = \nu \overset{1}{l_\alpha} d\xi^\alpha, \quad \omega_{n-1} = (\nu)^{n-1} \overset{n-1}{l_\alpha} d\xi^\alpha, \quad \omega_n = (\nu)\,\delta\eta, \tag{10}$$

где $\delta\eta$ — абсолютный дифференциал локальной координаты η (([1]), стр. 285). Для эквивалентности двух полей локальных кривых необходима, прежде всего, возможность одинакового построения таких инвариантных форм или одновременное обращение в нуль всех плотностей (9) для обоих полей. Если инвариантные формы (одинаково построенные) существуют для обоих полей, то необходимые и достаточные условия эквивалентности получаются (и притом в инвариантной форме) как условия интегрируемости системы Пфаффа, составление которой, так же как и отыскание условий ее интегрируемости, производится способом, вполне аналогичным указанному В. Вагнером (([1]), стр. 304 и след.).

Если все плотности (9) для обоих полей обращаются в нуль, то такие поля эквивалентны в том и только том случае, когда: 1) инварианты I $\left(I = \overset{1}{\underset{01}{I}}\right)$ для обоих полей постоянны и имеют одинаковое численное значение, инварианты J $\left(J = \overset{n-1}{\underset{1,\,n-2}{I}}\right)$ для обоих полей или одновременно постоянны и равны или одновременно не являются постоянными; или 2) инварианты I для обоих полей не являются постоянными, инварианты J для обоих полей являются функциями от I одного и того же вида, точно так же инварианты $\underset{0}{D}I$ для обоих полей являются функциями от I одного и того же вида.

Решение задачи эквивалентности двух полей показывает, что полная система инвариантов поля локальных кривых может быть построена из плотностей (7) и получающихся из них применением операторов ∇ и $\underset{a}{D}$.

Поле локальных кривых называется постоянным, если, выполняя преобразования переменных (8), можно уравнения поля привести к виду (1), т. е. все локальные кривые для всех точек X_n определить одинаковыми уравнениями. Справедливо предложение: для того чтобы поле локальных кривых было постоянным, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\overset{a}{\underset{bc}{I}} = 0, \quad D_\alpha \overset{(2)}{w} = 0, \ \ldots, \ D_\alpha \overset{(n)}{w} = 0, \quad D_\alpha \gamma = 0. \tag{11}$$

Полученные результаты находят применение к вариационной задаче Лагранжа при $n-2$ дополнительных условиях, так как в этом случае поле индикатрис метрики Лагранжа является полем локальных кривых в X_n.

Поступило
10 I 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Вагнер. Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, в. 6, 257 (1948). [2] В. Вагнер, ДАН, 40, № 3 (1943). [3] В. Вагнер, ДАН, 46, № 8 (1945).