Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 3

МАТЕМАТИКА

В. А. МАРЧЕНКО

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 29 III 1950)

1. Рассмотрим заданный на полуинтервале $[0, a)$, $a \leqslant \infty$, дифференциальный оператор второго порядка L вида

$$L[u] = u''(x) - q(x)u(x), \tag{1}$$

где $q(x)$ — вещественная функция, суммируемая в каждом интервале $[0, b]$ при $b < a$. Условимся обозначать через $\varphi_\alpha(\lambda, x)$ и $\theta_\alpha(\lambda, x)$ решения уравнения

$$L[u] + \lambda u = 0, \tag{2}$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$\varphi_\alpha(\lambda, 0) = \sin\alpha, \quad \varphi'_\alpha(\lambda, 0) = -\cos\alpha; \qquad \theta_\alpha(\lambda, 0) = \cos\alpha, \quad \theta'_\alpha(\lambda, 0) = \sin\alpha.$$

Теорема А. *Для каждой пары операторов L_1 и L_2 вида* (1) *и чисел α_1, α_2* ($\sin\alpha_1 \neq 0$, $\sin\alpha_2 \neq 0$) *существует оператор V, определенный на всех суммируемых в каждом интервале* $(0, b)$ $(b < a)$ *функциях $f(x)$ равенством*

$$V[f] = f(x) + \int_0^x K(x, t) f(t)\, dt,$$

такой, что

$$V[\varphi^{(1)}_{\alpha_1}(\lambda, x)] = v\varphi^{(2)}_{\alpha_2}(\lambda, x), \quad v = \sin\alpha_1 / \sin\alpha_2,$$

где $\varphi^{(1)}_{\alpha_1}(\lambda, x)$ и $\varphi^{(2)}_{\alpha_2}(\lambda, x)$ — решения уравнения (2) *для операторов L_1 и L_2 соответственно. При этом ядро $K(x, t)$ вещественно и равномерно ограничено в каждом квадрате* $0 \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant t \leqslant b$, $b < a$.

Оператор V мы будем называть оператором преобразования и обозначать через $V_{\{L_1 L_2 \alpha_1 \alpha_2\}}$.

Доказательство для случая $L_2[u] \equiv u''(x)$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$ имеется в работе ([1]). В общем случае доказательство проводится аналогично.

2. Сформулируем основные результаты Г. Вейля, нужные нам в дальнейшем (они подробно изложены в книге ([2])).

I. Для всех невещественных значений λ существует решение уравнения (2) $\psi(\lambda, x)$, принадлежащее $L_2[0, a)$, вида

$$\psi(\lambda, x) = \theta_\alpha(\lambda, x) + m(\lambda)\varphi_\alpha(\lambda, x),$$

где функция $m(\lambda)$ аналитична в верхней (нижней) полуплоскости и

$$m(\bar\lambda) = \overline{m(\lambda)}; \quad \mathrm{Im}[m(\lambda)]\,\mathrm{Im}[\lambda] < 0. \tag{3}$$

Для данного α функция $m(\lambda)$, вообще говоря, не единственна. Если функция $m(\lambda)$ единственна, то граничное условие в нуле

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0$$

определяет граничную задачу для оператора L. Если же $m(\lambda)$ не единственна, то для получения граничной задачи следует, кроме граничного условия в нуле, выбрать определенным образом функцию $m(\lambda)$, что соответствует заданию граничного условия в точке a.

II. Каждой граничной задаче соответствует неубывающая функция обложения $\rho(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$, взаимно-однозначно связанная с функцией $m(\lambda)$ равенством

$$\rho(\lambda_2) - \rho(\lambda_1) = \frac{1}{\pi} \lim_{\delta \to 0} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} - \operatorname{Im}[m(u + i\delta)]\, du, \tag{4}$$

где λ_1 и λ_2 — любые точки непрерывности функции $\rho(\lambda)$. При этом функция $\rho(\lambda)$ порождает изометрическое отображение пространства $L_2[0, a)$ на $L_{2\{\rho\}}(-\infty, \infty)$ по формулам

$$F(\lambda) = \int_0^a f(x)\, \varphi_\alpha(\lambda, x)\, dx, \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\, \varphi_\alpha(\lambda, x)\, d\rho(\lambda), \tag{5}$$

где интегралы понимаются в смысле сходимости в метриках пространств $L_2[0, a)$ и $L_{2\{\rho\}}(-\infty, \infty)$ соответственно. Имеет место равенство Парсеваля

$$\|f\|^2 = \int_0^a |f(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2\, d\rho(\lambda).$$

3. Настоящая заметка посвящена доказательству и некоторым имеющим значение в физике следствиям следующей теоремы:

Теорема 1. *Пусть даны два оператора L_1 и L_2*

$$L_1[u] = u''(x) - q_1(x)\, u(x), \quad L_2[u] = u''(x) - q_2(x)\, u(x).$$

Меняя всевозможным образом граничные задачи для операторов L_1 и L_2, мы получим два множества функций обложения R_1 и R_2. Если существует пара функций $\rho_1(\lambda) \in R_1$ и $\rho_2(\lambda) \in R_2$, связанных равенством $\rho_1(\lambda) = c\rho_2(\lambda)$ (c — константа), то $q_1(x) = q_2(x)$ почти всюду в $[0, a)$. Иными словами, любая из функций обложения $\rho(\lambda)$, фигурирующих в формулах обращения (5), однозначно определяет оператор L.

Доказательство. Пусть функция $\rho_1(\lambda)$ соответствует граничной задаче для оператора L_1 с условием $y(0)\cos\alpha_1 + y'(0)\sin\alpha_1 = 0$, а $\rho_2(\lambda)$ — граничной задаче для оператора L_2 с условием $y(0)\cos\alpha_2 + y'(0)\sin\alpha_2 = 0$ (при этом, конечно, возможно, что одна из этих задач или обе имеют граничное условие и в точке a). Допустим еще, что

$$\sin\alpha_1 \neq 0, \quad \sin\alpha_2 \neq 0. \tag{6}$$

Согласно II, для любой функции $f(x) \in L_2[0, a)$ имеем:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\, \varphi_{\alpha_1}^{(1)}(\lambda, x)\, d\rho_1(\lambda).$$

Применяя к обеим частям этого равенства оператор $V = V_{\{L_1 L_2 \alpha_1 \alpha_2\}}$, получим:

$$V[f] = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\, V[\varphi_{\alpha_1}^{(1)}(\lambda, x)]\, d\rho_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} cvF(\lambda)\, \varphi_{\alpha_2}^{(2)}(\lambda, x)\, d\rho_2(\lambda).$$

Поэтому равенство Парсеваля дает:

$$\|V[f]\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |cvF(\lambda)|^2 d\rho_2(\lambda) = v^2c \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 d\rho_1(\lambda) = v^2c\,\|f\|^2,$$

откуда следует, что оператор $V_1 = v^{-1}c^{-1/2}V$ унитарен. Легко видеть, что оператор V_1, имеющий, согласно теореме А, вид:

$$V_1[f] = v^{-1}c^{-1/2}f(x) + \int_0^x v^{-1}c^{-1/2}K(x, t)f(t)\,dt,$$

может быть унитарным только при $K(x, t) \equiv 0$ и $|c^{-1/2}v^{-1}| = 1$.

Поэтому для оператора V имеем:

$$V[f] = vc^{1/2}f(x)$$

и, в частности,

$$v\varphi^{(2)}_{\alpha_2}(\lambda, x) = V[\varphi^{(1)}_{\alpha_1}(\lambda, x)] = vc^{1/2}\varphi^{(1)}_{\alpha_1}(\lambda, x),$$

откуда, очевидно, следует, что $q_1(x) = q_2(x)$ почти всюду в $[0, a)$, $\alpha_1 = \alpha_2$ и $c = 1$. Случай, когда условия (6) не выполнены, легко свести к рассмотренному.

4. Пусть оператор L имеет дискретный спектр. Рассмотрим две граничные задачи (α) и (β) для оператора L с условиями

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0 \quad (\alpha); \qquad y(0)\cos\beta + y'(0)\sin\beta = 0 \quad (\beta)$$

и одним и тем же условием в точке a, если его вообще нужно задавать. Известно, что в этом случае функции $m_\alpha(\lambda)$ и $m_\beta(\lambda)$, соответствующие этим задачам, мероморфны, связаны равенством

$$m_\beta(\lambda) = \frac{1 + hm_\alpha(\lambda)}{h - m_\alpha(\lambda)} \quad (h = \operatorname{ctg}(\beta - \alpha) \neq \infty) \tag{7}$$

и имеют только простые и вещественные полюсы и нули. Характеристические числа (спектр) задачи (α) совпадают с полюсами $m_\alpha(\lambda)$, а спектр задачи (β) — с полюсами $m_\beta(\lambda)$, т. е., согласно (7), с нулями $h - m_\alpha(\lambda)$.

Теорема 2. *Рассмотрим граничные задачи:*

(α_1) *и* (β_1) *для оператора* L_1 *с граничными условиями*

$$y(0)\cos\alpha_1 + y'(0)\sin\alpha_1 = 0 \quad (\alpha_1); \qquad y(0)\cos\beta_1 + y'(0)\sin\beta_1 = 0 \quad (\beta_1)$$

и одним и тем же условием в точке a, *если его вообще нужно задавать;*

(α_2) *и* (β_2) *для оператора* L_2 *с граничными условиями*

$$y(0)\cos\alpha_2 + y'(0)\sin\alpha_2 = 0 \quad (\alpha_2); \qquad y(0)\cos\beta_2 + y'(0)\sin\beta_2 = 0 \quad (\beta_2)$$

и одним и тем же условием в точке a, *если его вообще нужно задавать.*

Если $\operatorname{ctg}(\beta_1 - \alpha_1) \neq \infty$, $\operatorname{ctg}(\beta_2 - \alpha_2) \neq \infty$, *операторы* L_1 *и* L_2 *имеют дискретные спектры и спектр задачи* (α_1) *совпадает со спектром задачи* (α_2), *а спектр задачи* (β_1) — *со спектром задачи* (β_2), *то* $q_1(x) = q_2(x)$ *почти всюду в* $[0, a)$.

Доказательство. Из условия теоремы и формул (7) следует, что $\dfrac{h_1 - m^{(1)}_{\alpha_1}(z)}{h_2 - m^{(2)}_{\alpha_2}(z)}$ ($h_1 = \operatorname{ctg}(\beta_1 - \alpha_1)$, $h_2 = \operatorname{ctg}(\beta_2 - \alpha_2)$) есть целая функция без нулей (здесь функции $m^{(1)}_{\alpha_1}(z)$ и $m^{(2)}_{\alpha_2}(z)$ соответствуют задачам (α_1) и (α_2)). Поэтому $g(z) = \log \dfrac{h_1 - m^{(1)}_{\alpha_1}(z)}{h_2 - m^{(2)}_{\alpha_2}(z)}$ тоже целая функция. Из условий (3) легко вывести, что $\arg \dfrac{h_1 - m^{(1)}_{\alpha_1}(z)}{h_2 - m^{(2)}_{\alpha_2}(z)}$, а с ним и $\operatorname{Im} g(z)$

равномерно ограничены во всей плоскости, откуда следует, что $g(z) \equiv c$, где c — вещественная константа. Но тогда $h_1 - m_{\alpha_1}^{(1)}(z) = ch_2 - cm_{\alpha_2}^{(2)}(z)$ и $\operatorname{Im} m_{\alpha_1}^{(1)}(z) = c \operatorname{Im} m_{\alpha_2}^{(2)}(z)$, т. е., согласно (4), $\rho_1(\lambda) = c\rho_2(\lambda)$, где $\rho_1(\lambda)$ и $\rho_2(\lambda)$ — функции обложения, отвечающие задачам (α_1) и (α_2) соответственно. Поэтому из теоремы 1 следует, что $q_1(x) = q_2(x)$ почти всюду в $[0, a)$. В простейшем частном случае, когда полуинтервал $[0, a)$ конечен и $q_1(x)$ и $q_2(x)$ суммируемы во всем полуинтервале $[0, a)$, мы получим уточнение теоремы Борга ([3]).

5. Рассмотрим теперь оператор L на полуоси $[0, \infty)$ при дополнительном условии, наложенном на $q(x)$:

$$\int_0^\infty (1+x)\,|q(x)|\,dx < \infty. \tag{8}$$

Легко видеть, что условие (8) влечет аналитичность в нижней полуплоскости функции

$$M(s) = i\sin\alpha - \frac{\cos\alpha}{s} + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-1st} q(t)\,\varphi_\alpha(s^2, t)\,dt$$

и непрерывность функции $sM(s)$ на вещественной оси. Далее, равномерно в нижней плоскости и на вещественной оси

$$\begin{aligned} &\lim_{|s|\to\infty} M(s) = i\sin\alpha, \quad \text{если } \sin\alpha \neq 0; \\ &\lim_{|s|\to\infty} sM(s) = -1, \quad \text{если } \sin\alpha = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

При вещественных s имеют место асимптотические формулы:

$$\varphi_\alpha(s^2, x) = |M(s)|\sin(sx + \omega_\alpha(s)) + o(1),$$

где $\omega_\alpha(s) = \arg M(s)$ называется предельной фазой решения $\varphi_\alpha(s^2, x)$. Известно, далее, что функция обложения $\rho(\lambda)$, соответствующая граничной задаче для оператора L с условием

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \tag{10}$$

днозначно выражается через $M(s)$, если оператор L не имеет точечного спектра.

Теорема 3. *Если операторы L_1 и L_2 удовлетворяют условию* (8), *граничные задачи* (10) *для этих операторов не имеют точечной части спектра и предельные фазы $\omega_\alpha^{(1)}(s)$, $\omega_\alpha^{(2)}(s)$ равны, то $q_1(x) = q_2(x)$ почти всюду в* $[0, \infty)$.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что функция $g(z) = M_1(z)/M_2(z)$ аналитична в нижней полуплоскости, непрерывна и вещественна на вещественной оси. Отсюда по принципу симметрии следует, что $g(z)$ — целая функция. Далее, из (9) следует, что $g(z) \sim 1$ при $|s| \to \infty$, т. е., по теореме Лиувилля, $g(z) \equiv 1$, откуда следует, что $\rho_1(\lambda) = \rho_2(\lambda)$, и, по теореме 1, $q_1(x) = q_2(x)$ почти всюду. Если $\sin\alpha = 0$, то условие (8) можно ослабить, заменив его на $\int_0^\infty x\,|q(x)|\,dx < \infty$, что приведет к результатам Левинсона ([4]).

Научно-исследовательский институт
математики и механики
Харьковского государственного университета

Поступило
28 III 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Я. Повзнер, Матем. сборн., 23, (63): 1, 25 (1948). [2] Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, 1950. [3] G. Borg, Acta Math., 78, 1—2, 1 (1946). [4] N. Levinson, Bull. Am. Math. Soc., 55, No. 5, 57 (1949).