Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 3

МАТЕМАТИКА

В. В. ВАГНЕР

К ТЕОРИИ ПСЕВДОГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 30 III 1950)

В современной дифференциальной геометрии важное значение имеют псевдогруппы преобразований, в частности, псевдогруппы преобразований Ли, изучение которых, в силу теоремы Медолаги, тесно связано с теорией геометрических дифференциальных объектов ([1]). Однако до сих пор мы не имеем общей теории псевдогрупп преобразований, так же как и построенной с современной точки зрения теории псевдогрупп преобразований Ли. Попытка установления некоторых общих положений этой теории является задачей настоящей заметки.

Пусть M — произвольное множество и f — некоторое подмножество произведения $M\times M$. Отображение (в общем случае многозначное) $m\to pr_2(f\cap(\{m\}\times M))$ подмножества $pr_1 f$ на подмножество $pr_2 f$ в M мы будем называть обобщенным частным преобразованием в M, для которого f является графиком. В дальнейшем мы будем отождествлять обобщенные частичные преобразования с их графиками и обозначать их одинаковыми символами. Пустое подмножество $\emptyset$ в $M\times M$ мы будем считать также графиком преобразования, определенного на пустом подмножестве в M, которое будем называть пустым преобразованием. f^{-1}, являющееся образом f при канонической симметрии ([2]) в $M\times M$, будем называть обратным преобразованием для f. Преобразование *$\bar{f}f = pr_{13}((f\times M)\cap(M\times\bar{f}))$ будем называть произведением ([2]) преобразований f и $\bar{f}$. Умножение преобразований, как известно, будет ассоциативно и удовлетворять соотношению $(\bar{f}f)^{-1}=f^{-1}\bar{f}^{-1}$. Пусть F — некоторое множество преобразований в M. Семейство $(f_i)_{i\in I}$ преобразований из F называется совместным в F, если преобразование $\bigcup_{i\in I} f_i$, называемое объединением преобразований семейства, также принадлежит F. Обозначим через $f_2\circ f_1$, где $f_1, f_2\in F$, подмножество преобразований из F, определяемое условием: $f\in f_2\circ f_1$ равносильно $f_2f_1\subset f$. Подмножество $f_2\circ f_1$ назовем относительным произведением преобразований f_1 и f_2 из F. Относительное умножение преобразований из данного множества F в общем случае будет неассоциативно. Относительное умножение преобразований из F мы можем рассматривать как многозначную бинарную операцию, определенную для всех пар f_1, f_2, для которых $f_2\circ f_1\neq\emptyset$. Это открывает возможность представления множеств с заданной произвольной (в общем случае многозначной и неассоциативной) бинарной операцией с помощью множеств преобразований. При этом пока остается открытым вопрос о том,

* Операция проектирования pr_{13} определяется так: $pr_{13}(m_1, m_2, m_3) = (m_1, m_3)$.

всегда ли возможно такое представление, и если нет, то при каких условиях оно возможно.

Если $ff^{-1} \subset \Delta$ и $f^{-1}f \subset \Delta$, где Δ — диагональ $M \times M$, то преобразование f определяет взаимно-однозначное отображение $pr_1 f$ на $pr_2 f$.

Считая пустое преобразование взаимно-однозначным, мы получаем, что произведение взаимно-однозначных преобразований будет всегда взаимно-однозначным преобразованием. В дальнейшем мы будем рассматривать только взаимно-однозначные частичные преобразования множества M, совокупность которых обозначим через $\mathfrak{T}$. Пусть $T \subset \mathfrak{T}$. T называется полупсевдогруппой преобразований, если $t_2 \circ t_1 \neq \emptyset$ для всех $t_1, t_2 \in T$. Полупсевдогруппа называется мультипликативно полной, если $t_2 t_1 \in T$ для всех $t_1, t_2 \in T$. Полупсевдогруппа называется псевдогруппой, если из $t \in T$ следует $t^{-1} \in T$. Псевдогруппа преобразований, для которой относительное умножение преобразований ассоциативно и каждое $t^{-1} \circ t$ содержит частичное тождественное преобразование, может рассматриваться как абстрактная мультигруппа, мы назовем ее мультигруппой преобразований. Если все относительные произведения состоят из одного элемента, то мультигруппу преобразований можно рассматривать как абстрактную группу, и мы будем называть ее группой преобразований. Это определение группы преобразований является обобщением по сравнению с обычным. Оно совпадает с обычным только в случае мультипликативно полной группы преобразований.

Пусть теперь M — топологическое пространство. Обозначим через $\mathfrak{H}$ подмножество в $\mathfrak{T}$, состоящее из всех преобразований в M, являющихся гомеоморфизмами между открытыми множествами в M. Множество преобразований $H \subset \mathfrak{H}$ называется топологически полным, если выполняются условия: 1) из $\bigcup\limits_{i \in I} h_i \in \mathfrak{H}$, где $h_i \in H$, следует $\bigcup\limits_{i \in I} h_i \in H$; 2) из $\bar{h} \subset h \in H$, где $\bar{h} \in \mathfrak{H}$, следует $\bar{h} \in H$.

Произведение преобразований из $\mathfrak{H}$ есть также преобразование из $\mathfrak{H}$. Легко видеть, что топологически полная псевдогруппа будет также мультипликативно полной.

Прежде чем перейти к определению псевдогрупп преобразований Ли в общем пространстве Веблена — Уайтхеда X_n, мы рассмотрим нужную для этого общую теорию изоморфных отбражений произвольного множества простых пространств Клейна. Пусть $(K_i)_{i \in I}$ — множество изоморфных между собой простых пространств Клейна и Θ — некоторое множество изоформных отображений между этими пространствами. Обозначим через $\Theta_{ii'}$, $i, i' \in I$, подмножество Θ, состоящее из всех изоморфных отображений θ пространства K_i на пространство $K_{i'}$. Если все $\Theta_{ii'} \neq \emptyset$, то Θ называется транзитивным. Очевидно, что в случае нетранзитивности Θ множество $(K_i)_{i \in I}$ можно разбить на подмножества $(K_{i_\lambda})_{i_\lambda \in I_\lambda}$, $\lambda \in \Lambda$, таким образом, что $\Theta_{i_\lambda i_{\lambda'}} = \emptyset$ при $\lambda \neq \lambda'$ и $\Theta_{i_\lambda i_{\lambda'}} \neq$ $\neq \emptyset$ при $\lambda = \lambda'$. Θ в этом случае разбивается на подмножества $\Theta_\lambda =$ $= \bigcup \Theta_{i_\lambda i'_\lambda}$, каждое из которых будет транзитивным для соответствующего подмножества $(K_{i_\lambda})_{i_\lambda \in I_\lambda}$ пространств Клейна. Таким образом изучение нетранзитивного множества изоморфных отображений может быть сведено к изучению транзитивных множеств. Множество изоморфных отображений Θ называется замкнутым, если выполняются следующие условия: 1) из $\theta \in \Theta_{ii'}$, $\bar{\theta} \in \Theta_{i'i''}$ следует $\bar{\theta}\theta \in \Theta_{ii''}$; 2) из $\theta \in \Theta_{ii'}$ следует $\theta^{-1} \in \Theta_{i'i}$. Если Θ замкнуто, то подмножества $A_i = \Theta_{ii}$, состоящие из автоморфных преобразований в K_i, будут являться группами. Пусть Θ замкнуто и транзитивно. Рассматривая A_i как группу преобразований $\bar{\varkappa} = \varkappa\alpha^{-1}$, $\alpha \in A_i$, в множестве K_i предпочитаемых координатных систем пространства K_i, мы получаем разбиение K_i на системы транзитивности, совокупность которых обозначим через $\mathfrak{K}_i$. Для того чтобы две координатные системы $\varkappa$ и $\bar{\varkappa}$ принадлежали одному и тому же подмножеству $\mathfrak{k} \in \mathfrak{K}_i$, необходимо и достаточно, чтобы преобразование $\bar{\varkappa}^{-1}\varkappa$ принадлежало A_i. Пусть $\varkappa$, $\bar{\varkappa} \in \mathfrak{k}$, где $\mathfrak{k} \in \mathfrak{K}_i$. Рассмотрим соответствующие им при изоморфных отображениях $\theta, \bar{\theta} \in \Theta_{ii'}$ координатные системы $\varkappa' = \varkappa\theta^{-1}$, $\bar{\varkappa}' = \bar{\varkappa}\bar{\theta}^{-1}$ из $K_{i'}$. Из соотношения $\bar{\varkappa}'^{-1}\varkappa' = \bar{\theta}\,\bar{\varkappa}^{-1}\varkappa\theta^{-1}$ мы получаем, замечая, что $\bar{\varkappa}^{-1}\varkappa \in A_i$, в силу замкнутости Θ, $\bar{\varkappa}'^{-1}\varkappa' \in A_{i'}$, откуда $\varkappa'$, $\bar{\varkappa}' \in \mathfrak{k}'$, где $\mathfrak{k}' \in \mathfrak{K}_{i'}$. Легко видеть, что это означает, что все отображения из $\Theta_{ii'}$ определяют одно и то же отображение $\mathfrak{K}_i$ на $\mathfrak{K}_{i'}$. Пользуясь тем, что Θ замкнуто и транзитивно, мы получаем отсюда взаимно-однозначное соответствие между всеми множествами $\mathfrak{K}_i$. Пусть $\varkappa \in \mathfrak{k}$, $\bar{\varkappa}' \in \mathfrak{k}'$, где $\mathfrak{k} \in \mathfrak{K}_i$ и $\mathfrak{k}' \in \mathfrak{K}_{i'}$ соответствуют друг другу. Покажем, что отсюда следует, что изоморфное отображение $\bar{\varkappa}'^{-1}\varkappa$ K_i на $K_{i'}$ принадлежит $\Theta_{ii'}$. Пусть $\theta \in \Theta_{ii'}$, тогда $\varkappa' = \varkappa\theta^{-1} \in \mathfrak{k}'$. Пользуясь соотношением $\bar{\varkappa}'^{-1}\varkappa = \bar{\varkappa}'^{-1}\varkappa'\theta$ и замечая, что $\bar{\varkappa}'^{-1}\varkappa' \in A_{i'}$, мы получаем, в силу замкнутости Θ, $\bar{\varkappa}'^{-1}\varkappa \in \Theta_{ii'}$.

Таким образом, $\Theta_{ii'}$ состоит из всех отображений $\varkappa'^{-1}\varkappa$, где $\varkappa \in \mathfrak{k}$, $\varkappa' \in \mathfrak{k}$, $\varkappa' \in \mathfrak{k}'$, т. е. из всех изоморфных отображений K_i на $K_{i'}$, определяющих одно и то же данное отображение $\mathfrak{K}_i$ на $\mathfrak{K}_{i'}$. Определим в каждом K_i геометрический объект Ω_i, для которого $\mathfrak{K}_i$ является множеством прообразов его значений, таким образом, что для соответствующих прообразов значений значения геометрических объектов равны.

Нетрудно видеть, что Θ будет множеством всех изоморфных отображений, при которых геометрические объекты Ω_i соответствуют друг другу. Если Θ нетранзитивно, то, разбивая его вышеуказанным образом на транзитивные подмножества Θ_λ, мы построим соответствующие геометрические объекты Ω_{i_λ} так, чтобы Ω_{i_λ} и $\Omega_{i_{\lambda'}}$ при $\lambda \neq \lambda'$ не были эквивалентны. Тогда Θ будет множеством всех изоморфных отображений, при которых геометрические объекты Ω_i соответствуют друг другу.

Пусть X_n — общее пространство Веблена — Уайтхеда, для простоты предполагаемое аналитическим. Пусть P — произвольная топологически полная псевдогруппа регулярных аналитических точечных преобразований в X_n. P будет индуцировать для каждого $v = 1, 2, \ldots$ множество $\Theta^{(v)}$ изоморфных отображений касательных пространств T_{vn} порядка v, ассоциированных с точками X_n, которое будет замкнутым. Если P транзитивна, то $\Theta^{(v)}$ будет также транзитивным. В противном случае $\Theta^{(v)}$ будет разбиваться на транзитивные подмножества $\Theta^{(v)}_\lambda$, определяющие отображение касательных пространств, ассоциированных с точками одних и тех же систем транзитивности P. P называется дифференциально определимой псевдогруппой преобразований в X_n, если для некоторого v она содержит все регулярные аналитические преобразования в X_n, индуцирующие изоморфные отображения касательных пространств, содержащиеся в $\Theta^{(v)}$. Отсюда следует, что всякая дифференциально определимая псевдогруппа преобразований в X_n является псевдогруппой инвариантности некоторого геометрического дифференциального объекта в X_n, множества однородности которого совпадают с системами транзитивности псевдогруппы.

Следуя определению самого Ли, данному им, впрочем, для преобразований в арифметическом пространстве, мы будем называть P псевдогруппой преобразований Ли в X_n, если ее преобразования в координатах определяются решениями неограниченно интегрируемых систем дифференциальных уравнений порядка v вида

$$\Phi^A(\xi^\alpha, f^\alpha, f^\alpha_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}) = 0 \quad (s = 1, \ldots, v). \tag{1}$$

Каждая система значений всех переменных ξ^α, f^α, $f^\alpha_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ $(s = 1, \ldots, v)$ определяет изоморфное отображение касательных пространств $T_{vn}(\xi^\alpha)$ на $T_{vn}(f^\alpha)$, для которого $f^\alpha_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ является компонентами связующего объекта отображения ([1]). Таким образом, уравнения (1) определяют некоторое множество $\Theta^{(v)}$ изоморфных отображений касательных пространств, которое при этом будет индуцироваться самой псевдогруппой P в силу неограниченной интегрируемости уравнений (1). С другой стороны, по самому своему определению с помощью уравнений (1), P содержит все преобразования, индуцирующие отображения касательных пространств, принадлежащие $\Theta^{(v)}$, откуда следует, что всякая псевдогруппа преобразований Ли в X_n будет дифференциально определима.

Это дает теорему Медолаги в ее современной формулировке:

Каждая псевдогруппа преобразований Ли в X_n является псевдогруппой инвариантности некоторого геометрического дифференциального объекта в X_n.

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского

Поступило
27 II 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Вагнер, Дополнение к книге Веблен и Уайтхед, Основания дифференциальной геометрии, 1949. [2] N. Bourbaki, Éléments de mathématique, Théorie des ensembles, 1939.