Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Я. С. УФЛЯНД

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ИЗГИБА СЕКТОРНОЙ ПЛИТЫ С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ РАДИУСАМИ

(Представлено академиком А. Ф. Иоффе 13 III 1950)

Пусть упругая тонкая плита, изгибаемая произвольной поперечной нагрузкой q, имеет форму кругового сектора. Для случая свободно опертых радиусов точное решение задачи изгиба получено Б. Г. Галеркиным [1]. Если радиусы плиты закреплены, то можно применить метод опорных моментов И. Бубнова [2], что связано с чрезвычайно громоздкими выкладками (см., например, работу [3], где для случая равномерной нагрузки подсчитаны изгибающие моменты на закрепленном контуре кругового прямоугольника*). В настоящей работе задача сведена к некоторому интегральному уравнению с помощью приема, предложенного Г. А. Гринбергом [4] для прямоугольной плиты.

Если обозначить через u прогиб плиты, умноженный на цилиндрическую жесткость ($u = Dw$, $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$), то для величины $u(r, \theta)$ будем иметь бигармоническое уравнение

$$\Delta^2 u = q(r, \theta) \tag{1}$$

и граничные условия на закрепленных радиусах (рис. 1):

$$u|_{\theta=0} = u|_{\theta=2\gamma} = 0, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial \theta}\right|_{\theta=2\gamma} = 0. \tag{3}$$

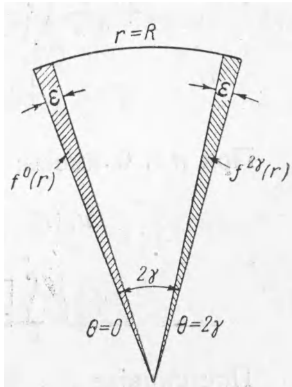

Рис. 1

Кроме того, должны быть заданы граничные условия на дуге $r = R$. Решение задачи ищем в виде ряда:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r) \cos \alpha_n \theta \quad \left(\alpha_n = \frac{n\pi}{2\gamma}\right). \tag{4}$$

При этом условия (3) будут удовлетворены.

Приложим по кромкам $\theta = 0$ и $\theta = 2\gamma$** распределенные нагрузки $f^0(r)$ и $f^{2\gamma}(r)$ (рис. 1), которые впоследствии будут подобраны так, чтобы удовлетворить условиям (2). Подставляя (4) в (1), получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\alpha_n^2}{r^2}\right]^2 u_n(r) \cos \alpha_n \theta = p(r, \theta); \tag{5}$$

* Случай сектора Карье не рассмотрен.
** По полоскам с угловым раствором ε ($\varepsilon \to 0$).

$$p(r,\ \theta)=\begin{cases} q(r,\theta)+\frac{1}{\varepsilon r}f^0(r) & \text{при } 0<\theta<\varepsilon, \\ q(r,\theta)+\frac{1}{\varepsilon r}f^{2\gamma}(r) & \text{при } 2\gamma-\varepsilon<\theta<2\gamma, \\ q(r,\ \theta) \text{ при остальных } \theta. \end{cases}$$

Если разложить функцию $p(r, \theta)$ в соответствующий тригонометрический ряд

$$p(r,\ \theta)=\frac{1}{2}p_0(r)+\sum_{n=1}^{\infty}p_n(r)\cos\alpha_n\theta,$$

где

$$p_n(r)=\frac{1}{\gamma r}\left[f^0(r)+(-1)^n f^{2\gamma}(r)\right]+q_n(r),\quad q_n(r)=\frac{1}{\gamma}\int_0^{2\gamma}q\ (r,\ \theta)\cos\alpha_n\theta d\theta,$$

то для $u_n(r)$ получается уравнение:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{\alpha_n^2}{r^2}\right]^2 u_n(r)=p_n(r), \tag{6}$$

общий интеграл которого при $n\geqslant 1$ будет:

$$u_n(r)=A_n r^{\alpha_n}+B_n r^{\alpha_n+2}+C_n r^{-\alpha_n}+D_n r^{-\alpha_n+2}+$$
$$+\frac{1}{8\alpha_n}\int_0^r\left\{\frac{1}{\alpha_n+1}\left[r^2\left(\frac{r}{t}\right)^{\alpha_n}-t^2\left(\frac{t}{r}\right)^{\alpha_n}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\alpha_n-1}\left[r^2\left(\frac{t}{r}\right)^{\alpha_n}-t^2\left(\frac{r}{t}\right)^{\alpha_n}\right]\right\}tp_n(t)\,dt. \tag{7}$$

При $n=0$ имеем:

$$u_0(r)=A_0+B_0r^2+C_0\lg\frac{r}{R}+D_0r^2\lg\frac{r}{R}+$$
$$+\frac{1}{8}\int_0^r\left[t^2-r^2+(t^2+r^2)\lg\frac{r}{t}\right]tp_0(t)\,dt. \tag{8}$$

Постоянные A_n, B_n, C_n, D_n должны быть определены из двух условий на краю $r=R$, а также из условий $u\Big|_{r=0}=\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=0}=0$, после чего выражение (4) будет содержать две функции $f^0(r)$ и $f^{2\gamma}(r)$, входящие под знаки интегралов.

Приравнивая нулю значения $u(r, 0)$ и $u(r, 2\gamma)$, т. е. удовлетворяя остающимся двум условиям (2), получим систему двух интегральных уравнений с двумя неизвестными функциями f^0 и $f^{2\gamma}$, которая легко приводится к двум интегральным уравнениям, содержащим порознь две неизвестные функции. Если нагрузка $q(r, \theta)$ симметрична относительно средней линии $\theta=\gamma$, то $f^0(r)=f^{2\gamma}(r)=f(r)$, и задача сводится к решению одного интегрального уравнения.

Приводим интегральное уравнение для того случая, когда край $r=R$ закреплен:

$$\int_0^r f(t)P(r,\ t)\,dt+\int_0^r f(t)P(t,\ r)dt+\int_0^R f(t)Q(r,\ t)\,dt=-4\gamma\Phi(r,\ 0), \tag{9}$$

где

$$P(r, t) = \sum_{n}^{0, 2, 4, \ldots} P_n(r, t), \quad Q(r, t) = \sum_{n}^{0, 2, 4, \ldots} Q_n(r, t);$$

$$P_n(r, t) = \frac{1}{\alpha_n}\left[\frac{r^2}{\alpha_n - 1} - \frac{t^2}{\alpha_n + 1}\right]\left(\frac{t}{r}\right)^{\alpha_n},$$

$$Q_n(r, t) = \left[\frac{r^2 + t^2}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_n + 1}\left(\frac{rt}{R}\right)^2 - \frac{1}{\alpha_n - 1} R^2\right]\left(\frac{rt}{R^2}\right)^{\alpha_n} \quad (n \geqslant 1); \quad (10)$$

$$P_0(r, t) = t^2\left(1 + \lg\frac{r}{t}\right),$$

$$Q_0(r, t) = \left[2\lg\frac{R}{t}\lg\frac{r}{R} - 1 + \lg\frac{rt}{R^2}\right]\left(\frac{rt}{R^2}\right)^2;$$

$$\Phi(r, \theta) = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^r q_n(t) P_n(r, t)\, t\, dt + \right.$$

$$\left. + \int_r^R q_n(t) P_n(t, r)\, t\, dt + \int_0^R q_n(t) Q_n(r, t)\, t\, dt\right]\cos\alpha_n\theta. \quad (11)$$

Интегральное уравнение (9) допускает эффективные приближения, основанные на закреплении отдельных точек на кромках $\theta = 0$ и $\theta = 2\gamma$ и замене распределенной нагрузки $f(t)$ силами, сосредоточенными в закрепленных точках. Хорошее приближение получается уже при одной закрепленной точке ($r = R/2$)*.

Приближенные формулы для прогиба в центре плиты ($u_0 = u(R/2, \gamma)$) и максимального изгибающего момента на закрепленной дуге ($M_{\max} = M_\theta(R, \gamma)$) имеют весьма простую структуру:

$$u_0 = \Phi(R/2, \gamma) - \mu\Phi(R/2, 0), \quad \mu = S(\gamma)/S(0);$$

$$S(\theta) = \frac{1}{16}(3 - 2\lg 2 - 2\lg^2 2) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\frac{1}{2\alpha_{2n}(\alpha_{2n}^2 - 1)} + \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha_{2n}}\left[\frac{1}{2\alpha_{2n}} - \frac{1}{16(\alpha_{2n} + 1)} - \frac{1}{\alpha_{2n} - 1}\right]\right\}\cos\alpha_{2n}\theta; \quad (12)$$

$$-M_{\max} = \left.\frac{\partial^2\Phi(r, \gamma)}{\partial r^2}\right|_{r=R} - \left(\lg 2 - \frac{3}{2^{\pi/\gamma} + 1}\right)\frac{\Phi(R/2, 0)}{R^2 S(0)}. \quad (13)$$

В табл. 1 приведены значения коэффициентов λ и k, характеризующих прогиб в центре плиты и максимальный изгибающий момент на дуговой заделке, для трех типов внешней нагрузки: 1) равномерная нагрузка** $q\left(\lambda_1 = w_0\frac{Eh^3}{qR^4} = u_0\frac{12(1-\nu^2)}{qR^4}, \quad k_1 = -\frac{M_{\max}}{qR^2}\right)$; 2) сила P, сосредоточенная в центре плиты $\left(\lambda_2 = w_0\frac{Eh^3}{PR^2} = \right.$

Таблица 1

γ	$\pi/8$	$\pi/4$	$\pi/2$
λ_1	0,00133	0,00840	0,0209
k_1	0,0220	0,0366	0,0597
λ_2	0,0140	0,0452	0,0755
k_2	0,0481	0,0854	0,134
λ_3	0,00273	0,0172	0,0485
k_3	0,0350	0,0536	0,0809

* Заметим, что наше решение точно удовлетворяет четырем граничным условиям из шести, в то время как при решении способом опорных моментов точно удовлетворяют трем условиям: $w|_{\theta=0} = w|_{\theta=2\gamma} = w|_{r=R} = 0$.

** В случае полукруглой плиты ($\gamma = \pi/2$) полученное нами первое приближение с точностью до 3—5% совпадает с результатами О. М. Сапонджяна ([5]), полученными иным методом.

$= u_0 \dfrac{12(1-\nu^2)}{PR^2}$, $k_2 = -\dfrac{M_{max}}{P}\Big)$; 3) нагрузка интенсивности p, распределенная по средней дуге сектора $\left(\lambda_3 = w_0 \dfrac{Eh^3}{pR^3} = u_0 \dfrac{12(1-\nu^2)}{pR^2}\right.$, $k_3 = \left. -\dfrac{M_{max}}{pR}\right)$. При расчетах было принято $\nu = 0{,}3$.

Ленинградский физико-технический институт
Академии наук СССР

Поступило
8 III 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Г. Галеркин, Упругие тонкие плиты, 1933, стр. 275. [2] И. Бубнов, Строительная механика корабля, ч. 2, 1914, стр. 465. [3] G. F. Carrier, Journ. of Appl. Mech., **11**, № 3, p. A — 134 (1944). [4] Г. А. Гринберг и Я. С. Уфлянд, Прикладн. матем. и мех., **13**, в. 4, 413 (1949). [5] О. М. Сапонджян, Прикладн. матем. и мех., **13**, в. 5, 501 (1949).