Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 3

МАТЕМАТИКА

Я. В. БЫКОВ

К ПРОБЛЕМЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 18 III 1950)

В данной работе рассматривается нелинейное интегральное уравнение

$$\lambda\varphi(x) = \int_B \cdots \int_B K(x, v) f(v, t_1, \ldots, t_m, \varphi(t_1), \ldots, \varphi(t_m), \varphi(v))\, d\sigma_m\, dv, \qquad (1)$$

где B — замкнутая ограниченная область r-мерного евклидова пространства; $K(x, v)$ и $f(v, t_1, \ldots, t_m, x_1 \ldots, x_m, y)$ — заданные функции, причем $f(v, t_1, \ldots, t_m, 0, \ldots, 0) \equiv 0$ для $v, t_1, \ldots, t_m \in B$; λ — параметр.

Если существует решение уравнения (1) с отличной от нуля нормой, при некотором значении параметра, то это решение называют собственной функцией уравнения (1), а соответствующее значение параметра — собственным значением.

Если $f(v, t_1, \ldots, t_m, x_1, \ldots, x_m, y)$ не зависит от $t_1, \ldots, t_m, x_1, \ldots, x_m$, то из уравнения (1) получается уравнение типа Гаммерштейна

$$\lambda\varphi(x) = \int_B K(x, v) f(v, \varphi(v))\, dv. \qquad (2)$$

Вопрос существования собственных функций уравнения (2) изучался в работах ([1-4]).

Мы полагаем, что $K(x, v)$ — ограниченное симметрическое положительное ядро, которое может иметь разрывы, допускаемые в теории линейных интегральных уравнений. $f(v, t_1, \ldots, t_m, x_1, \ldots, x_m, y)$ в некоторой окрестности $x_1 = \ldots = x_m = y = 0$ удовлетворяет следующим условиям: 1) измерима по совокупности аргументов $v, t_1, \ldots, t_m$ для $v, t_1, \ldots, t_m \in B$ и $|f(v, t_1, \ldots, t_m, x_1, \ldots, x_m, y)| \leqslant F(v, t_1, \ldots, t_m) \in L_{2, m+1}$; 2) непрерывна по аргументам $x_1, \ldots, x_m, y$ и по аргументам $x_1, \ldots, x_m$ имеет непрерывные частные производные первого порядка, причем $\partial f(v, t_1, \ldots, t_m, x_1, \ldots, x_m, y)/\partial x_j = \partial f(t_j, t_1, \ldots, t_{j-1}, v, t_{j+1}, \ldots, t_m, x_1, \ldots \ldots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \ldots, x_m, x_j)/\partial x_j$ $(j = 1, \ldots, m)$; 3) $|\partial f/\partial x_j| \leqslant F_1(v, s_1, \ldots \ldots, s_m) \in L_{2, m+1}$ $(j = 1, \ldots, m)$. Эти ограничения, накладываемые на функции $K(x, v)$ и f, назовем условием (А).

Теорема. *При выполнении условия* (А) *уравнение* (1) *имеет не менее счетного числа собственных функций.*

Доказательство. Пусть условие (А) выполнено в области $v, t_1, \ldots, t_m \in B; -l \leqslant x_1, \ldots, x_m, y \leqslant l$. Пусть $\{\varphi_k(x)\}$ — фундаментальная система собственных функций и $\{\lambda_k\}$ — система соответствующих собственных значений, принадлежащие ядру $K(x, v)$. Пусть, далее, $|K(x, v)| \leqslant M^2$. Рассмотрим уравнение

$$\lambda\varphi(x) = \int\limits_B \cdots \int\limits_B K_n(x, v) f(v, t_1, \ldots, t_m, \varphi(t_1), \ldots, \varphi(t_m), \varphi(v))\, d\sigma_m\, dv, \quad (3)$$

где $K_n(x, v) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(x)\,\varphi_i(v)}{\lambda_i}$ (n — фиксированное число).

Из существования ненулевого решения системы

$$\lambda\lambda_k\alpha_k = \int\limits_B \cdots \int\limits_B f(v, t_1, \ldots, t_m, h_n(t_1), \ldots, h_n(t_m), h_n(v))\, \varphi_k(v)\, d\sigma_m\, dv, \quad (4)$$

где $h_n(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\varphi_i(t)$, при некотором значении параметра λ, следует существование нетривиального решения уравнения (3).

Пусть c — произвольно фиксированное положительное число, лишь бы $2cM \leqslant l$. Введем вспомогательное обозначение. Под знаком функции $f(v, t_1, \ldots, t_m, x_1, \ldots, x_m, z)$ вместо аргументов $x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}$ (все $j_1, \ldots, j_k$ разные) напишем нули, вместо остальных x_j напишем, соответственно, $h_n(t_j)$. Сумму всевозможных слагаемых такого вида обозначим через $\sum_k f(v, t_1, \ldots, t_m, x_1, \ldots, x_m, z)$. Для точек поверхности эллипсоида $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2\lambda_i = c^2\ (\mathscr{E}_n)$ образуем вспомогательную функцию

$$H_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \frac{1}{m+1} \int\limits_B \cdots \int \int\limits_0^{h_n(v)} \{f(v, t_1 \ldots, t_m, h_n(t_1), \ldots, h_n(t_m), z) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \frac{k!}{m(m-1)\cdots(m-k+1)} \sum\nolimits_k f(v, t_1, \ldots, t_m, x_1, \ldots, x_m, z)\}\, dz\, d\sigma_m dv.$$

Тогда

$$\frac{\partial H_n}{\partial\alpha_k} = \int\limits_B \cdots \int f(v, t_1, \ldots, t_m, h_n(t_1), \ldots, h_n(t_m), h_n(v))\, \varphi_k(v) d\,\sigma_m\, dv.$$

По теореме Вейерштрасса функция H_n, как непрерывная в замкнутой ограниченной области, по крайней мере в одной точке $B_n(B_1^n, \ldots, B_n^n)$ достигает абсолютного минимума d_n и по крайней мере в одной точке A_n $(A_1^n, \ldots, A_n^n)$ — абсолютного максимума D_n. В согласии с теоремой Лагранжа, координаты точек B_n и A_n при некоторых значениях параметра λ^n и $\bar{\lambda}^n$ удовлетворяют системе (4).

$\psi^n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} B_i^n \varphi_i(x)$ и $\Psi^n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i^n \varphi_i(x)$ суть собственные функции уравнения (3), отвечающие собственным значениям λ^n и $\bar{\lambda}^n$. $|\psi^n(x)| \leqslant cM$ $|\Psi^n(x)| \leqslant cM$.

Для каждого натурального числа n образуем такие собственные функции и значения. $\{\lambda^n\}$ и $\{\bar{\lambda}^n\}$ — ограниченные последовательности. Семейства $\{\psi^n(x)\}$ и $\{\Psi^n(x)\}$ компактны в L_2 на основании леммы Вайнберга. Выберем систему индексов $l_1, \ldots, l_k, \ldots$ так, чтобы существовали:

$$\lim_{k\to\infty} \lambda^{l_k} = \lambda^0; \quad \lim_{k\to\infty} \bar{\lambda}^{l_k} = \bar{\lambda}^0; \quad \lim_{k\to\infty} \psi^{l_k} = \psi(x); \quad \lim_{k\to\infty} \Psi^{l_k}(x) = \Psi(x).$$

Функции $\psi(x)$ и $\Psi(x)$ удовлетворяют уравнению (1) соответственно при значениях параметра λ^0 и $\bar{\lambda}^0$. При доказательстве мы пользуемся одной леммой В. В. Немыцкого ([5]). Если H_∞ в некоторой точке $(\mathscr{E}_\infty)$ принимают положительное (отрицательное) значение, то $\Psi(x)$ $(\psi(x))$ не есть тождественный нуль, так как $\sup H_\infty(p) = D = H_\infty(\psi)$. Пусть $\psi(x) \equiv \Psi(x) \equiv 0$. Тогда $\frac{c}{\sqrt{\lambda_1}} = \varphi_1(x)$ есть собственная функция уравнения (1). Пусть для числа c_1 $(2c_1M \leqslant l)$ построили собственную функцию $\psi_1(x)$. Для положительного числа c_2, удовлетворяющего неравенству $c_2^2\, M^2 \operatorname{mes} B < \int\limits_B |\psi_1(x)|^2\, dx$, построим собственную функцию $\psi_2(x)$. Очевидно, $\int\limits_B |\psi_2(x)|^2\, dx < \int\limits_B |\psi_1(x)|^2\, dx$. Продолжая этот процесс, завершим доказательство теоремы.

Следствие. Интегральное уравнение

$$\lambda\varphi(x) = \sum_{m=0}^{n} \int\limits_B \cdots \int\limits_B K(x, v)\, f_m(v, t_1, \ldots, t_m, \varphi(t_1), \ldots, \varphi(t_m), \varphi(v))\, d\sigma_m\, dv$$

имеет не менее счетного числа собственных функций, если $K(x, v)$ и $f_m(v, t_1, \ldots, t_m, x_1, \ldots, x_m, y)$ $(m = 0, 1, \ldots, n)$ удовлетворяют условиям теоремы.

Теорема утверждает наличие не менее счетного числа собственных функций. О числе линейно независимых собственных функций даже для простого уравнения (2) до сих пор никаких результатов не получено. Ниже мы приведем случай, когда можно гарантировать существование не менее двух линейно независимых собственных функций.

Рассмотрим частный случай, когда $f(v, s_1, \ldots, s_m, x_1, \ldots, x_m, y)$ есть однородная функция k-го измерения относительно аргументов $x_1, \ldots, x_m, y$. Пусть $\varphi_0(x)$ есть собственная функция (1), отвечающая собственному значению λ_0. При $\lambda_0 = 0$ функция $h\varphi_0(x)$ при любом h есть собственная функция. При $\lambda_0 \neq 0$ функция $(\mu/\lambda_0)^{1/(k-1)}\, \varphi_0(x)$ есть собственная функция, отвечающая собственному значению μ. Если в этом частном случае H_∞ на $(\mathscr{E}_\infty)$ принимает как положительное, так и отрицательное значения и k — нечетное число, то существует не менее двух линейно независимых собственных функций.

Пусть a — вещественное неотрицательное число, $f(v, s_1, \ldots, s_m)$ — симметрическая по всем своим аргументам, суммируемая со своим квадратом функция. Если функция

$$H_\infty(A) = \frac{1}{(m+1)(a+1)} \int\limits_B \cdots \int\limits_B f(v, s_1, \ldots, s_m) \left[\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i(s_1)\right]^{a+1} \cdots$$

$$\cdots \left[\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i(v)\right]^{a+1} d\sigma_m\, dv$$

на $(\mathscr{E}_\infty)$ принимает значение $b \neq 0$, то любое действительное число μ, имеющее тот же знак, что и b, есть собственное значение уравнения

$$\lambda\varphi(x) = \int\limits_B \cdots \int\limits_B K(x, v)\, f(v, s_1, \ldots, s_m)\, \varphi^{a+1}(s_1) \ldots \varphi^{a+1}(s_m)\, \varphi^a(v)\, d\sigma_m\, dv. \quad (5)$$

Предполагается, что $a(m+1) + m - 1 > 0$. В частности, если H_∞ принимает положительное и отрицательное значения, то любое вещественное число — собственное значение уравнения (5). Если $a(m+1)+ +m-1$ есть четное число, то собственные функции, соответствующие разным по знаку собственным значениям, линейно независимы.

Пусть $f_n(p, q)$ — симметрическая суммируемая со своим квадратом функция для $p, q \in B$, а $\Phi(p, u)$ такая, что $\Phi(p, 0) \equiv 0$ и в некоторой окрестности $u=0$ непрерывна по n и суммируема по $p \in B$, причем $|\Phi(p, u)| \leqslant a(p) \in L_2$. Тогда интегро-дифференциальное уравнение

$$\lambda\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\int_B f_1(p, q)\, u(q)\, dq+u(p) \int_B f_2(p, q)\, u^2(q)\, dq+\Phi(p, u(p))$$

имеет не менее счетного числа нетривиальных решений, обращающихся на контуре области B в нуль. Область B предполагается такой, что функция Грина уравнения $\partial^2 u/\partial x^2+\partial^2 u/\partial y^2=0$, обращающаяся на контуре области B в нуль, существует.

Мы будем говорить, что функции $f_m(v, s_1, \ldots, s_m, x_1, \ldots, x_m, x_0)$ $(m=0,1, \ldots)$ и $K(x, v)$ удовлетворяют условию (В), если: а) $K(x, v)$ — симметрическое положительное непрерывное ядро; б) $f_m(v, s_1, \ldots, s_m, 0,0, \ldots, 0) \equiv 0$ в некоторой окрестности $x_1=x_2=\ldots=x_m=x_0=0$; в) $|f_m(v, s_1, \ldots, s_m, x_1, \ldots, x_m, x_0)| \leqslant F_m(v, s_1, \ldots, s_m) \in L_{2, m+1}$; г) ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\int_B dv\left[\int_B \cdots \int_B F_m(v, s_1, \ldots, s_m)\, d\sigma_m\right]^2\right\}^{1/2}$$ сходится; д) f_m имеют непрерывные частные производные первого порядка по аргументам $x_1, \ldots, x_m, x_0$ и $\partial f_m(v, t_1, \ldots, t_m, x_1, \ldots, x_m, x_0)/\partial x_j=\partial f_m(t_j, t_1, \ldots, t_{j-1}, v, t_{j+1}, \ldots, t_m, x_1, \ldots, x_{j-1}, x_0, x_{j+1}, \ldots, x_m, x_j)/\partial x_j$, $j=1,2, \ldots, m$ $(m=0,1, \ldots)$; е) $|\partial f_m/\partial x_j| \leqslant M_m(v, s_1, \ldots, s_m)$ $(j=0,1, \ldots, m)$; ж) ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+1) \int_B \cdots \cdots \int_B M_m(v, s_1, \ldots, s_m)\, \partial \sigma_m\, dv$$ сходится.

Т е о р е м а. *При выполнении условия* (В) *нелинейное интегральное уравнение*

$$\lambda \varphi(x)=\sum_{m=0}^{\infty} \int_B \cdots \int_B K(x, v) f_m(v, s_1, \ldots, s_m, \varphi(s_1), \ldots, \varphi(s_m), \varphi(v))\, \partial \sigma_m\, \partial v$$

имеет не менее счетного числа непрерывных собственных функций.

Если ядро $K(x, v)$ допускает разрывы в смысле теории линейных интегральных уравнений, то слегка изменим условия ж). В этом случае собственные функции суммируемы со своими квадратами.

Пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность проф. В. В. Немыцкому за ценные советы.

Киргизский государственный
педагогический институт
г. Фрунзе

Поступило
24 II 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] L. L i c h t e n s t e i n, Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen u. Integro-Differentialgleichungen, 1931. [2] M. G o l o m b, Math. Zs., **39**, 45 (1934). [3] Н. Н. Н а з а р о в, Нелинейные интегральные уравнения типа Гаммерштейна, Ташкент, 1941. [4] М. М. В а й н б е р г, ДАН, **46**, № 2 (1945); **58**, № 6 (1947); **61**, № 6 (1948); **63**, № 6 (1948); Тр. ГОКИ, **8** (20) (1948). [5] В. В. Н е м ы ц к и й, Матем. сборн., **41**, 3 (1934).