Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 3

МАТЕМАТИКА

Е. А. БАРБАШИН

О СУЩЕСТВОВАНИИ ГЛАДКИХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 29 III 1950)

Рассмотрим в евклидовом пространстве E_n систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где правые части суть функции класса C_r.

Пусть область G лежит в E_n; сечением области G назовем замкнутое в G множество F, обладающее тем свойством, что всякая максимальная связная дуга траектории из G пересекает F в одной и только в одной точке. Через $f(p, t)$ мы обозначаем в дальнейшем положение точки p через промежуток времени t.

Лемма. *Пусть область G обладает сечением F; определим функцию $t(p)$ в области G соотношением $f(p, -t(p)) \subset F$.*

Для любого ε можно указать функцию φ класса C_r, удовлетворяющую в области G условиям

$$|\varphi(p) - t(p)| < \varepsilon,$$

$$\sum_1^n X_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 1.$$

При доказательстве этой леммы мы пользуемся теоремами о продолжении дифференцируемых функций Уитнея и Эйленберга [1].

Мы скажем, что система дуг траекторий, заполняющих область G, неустойчива, если всякая точка p из G, двигаясь по траектории системы (1), выходит при $t \to \infty$ и $t \to -\infty$ за пределы любого ограниченного открытого множества, лежащего вместе с замыканием в области G. Мы скажем, что система дуг из G имеет несобственное седло (В. В. Немыцкий), если существует последовательность троек точек $\{p_n, q_n, r_n\}$ таких, что каждая тройка лежит на одной дуге траектории, точка q_n лежит между точками p_n и r_n, последовательности $\{p_n\}$, $\{r_n\}$ сходятся, соответственно, к точкам p и r из G, а последовательность $\{q_n\}$ не сходится ни к одной точке из G.

Теорема 1. *Пусть система дуг, заполняющих область G, неустойчива и не имеет несобственного седла; пусть, кроме того, временные длины всех дуг из G ограничены снизу положительным числом.*

Мы утверждаем, что

1) *Существует сечение S области G класса C_r.*

2) *Существует в области G первый интеграл системы* (1), *принадлежащий классу C_r и не обращающийся в постоянную ни в одном открытом подмножестве области G.*

3) *Для любой функции $\psi(p)$ класса C_r, заданной на S, и любой функции $\varphi(p)$ того же класса, заданной в области G, существует функция v класса C_r, удовлетворяющая в G уравнению $\sum_1^n X_i \frac{\partial v}{\partial x_i} = \varphi$ и совпадающая в точках S с функцией ψ.*

При доказательстве этой теоремы мы устанавливаем сначала, с помощью теорем В. В. Немыцкого [2], существование негладкого сечения области G, а затем применяем в каждом из перечисленных пунктов сформулированную выше лемму.

Известна теорема Камке [3], устанавливающая существование первого интеграла *u* в двумерном случае в некоторой односвязной области, не содержащей особых точек; этот первый интеграл оказывается главным интегралом, т. е. всюду в области удовлетворяет условию $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 > 0$.

Легко показать, однако, что в случае $n > 2$ теорема Камке оказывается несправедливой. Нам удалось выделить условия, обеспечивающие существование главной системы интегралов в случае $n = 3$.

Теорема 2. *Пусть область G, гомеоморфная трехмерному евклидову пространству, заполнена дугами системы*

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3, \tag{2}$$

удовлетворяющими условиям теоремы 1.

Существуют в области два первых интеграла u_1 и u_2 системы (2) *таких, что ранг матрицы $\left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\|$ равен 2 всюду в области G.*

При доказательстве этой теоремы мы существенным образом используем известную теорему из топологии, утверждающую, что существуют два односвязных двумерных многообразия — плоскость и сфера.

Предположим теперь, что точка $O(0, 0, \ldots, 0)$ является особой точкой системы (1), более того, мы предположим, что эта точка является асимптотически устойчивой точкой. Можно доказать, что траектории области притяжения точки O (с вычетом самой этой точки) образуют дисперсивную [4] динамическую систему. Применяя нашу лемму, мы можем установить существование сечения класса C_r, которое оказывается компактным многообразием.

Теорема 3. *Пусть $R = \sqrt{\sum_1^n x_i^2}$ и пусть в некоторой окрестности асимптотически устойчивой точки $O(0, 0, \ldots, 0)$ выполняются условия*

$$\sqrt{\sum_1^n X_i^2} \leqslant kR; \quad \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant m,$$

где $m > 0$. Пусть $q = \min\left(r, \left[\frac{m}{k}\right] - 2\right)$, где $\left[\frac{m}{k}\right]$ означает целую часть дроби $\frac{m}{k}$.

Мы утверждаем, что в области притяжения точки O (с включением в нее самой точки O) существует функция v класса C_q, удовлетворяющая уравнению

$$\sum_1^n X_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \varphi v = 0$$

и совпадающая на заданном сечении S области притяжения с заданной на S функцией $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Следующий пример показывает, что константы m и k играют существенную роль для существования решения рассмотренного уравнения, принадлежащего достаточно высокому классу:

$$-x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} + ku = 0.$$

Очевидно, решением этого уравнения, обращающимся в 1 на окружности $x^2 + y^2 = 1$, будет функция $u = (x^2 + y^2)^{k/2}$. При $0 < k < 1$ функция u не дифференцируема в точке $O(0, 0)$, при $k = 1$ она дифференцируема, но не принадлежит классу C_1, при $k > 1$ функция u будет уже принадлежать классу C_1.

Следствие. *Существует в области притяжения асимптотически устойчивой точки O стационарная положительно определенная функция Ляпунова, принадлежащая классу C_r и имеющая отрицательно определенную производную по времени.*

Этот результат является усилением теоремы Массера ([5]), обратившего теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости в стационарном случае. Для случая $n = 2$ подобное обращение было проведено И. Г. Малкиным ([6]).

Наряду с системой (1), рассмотрим теперь систему

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i + \varphi_i, \tag{3}$$

где φ_i — функции координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$, связанные неравенством

$$\sqrt{\sum_1^n \varphi_i^2} < \eta(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{4}$$

Следующая теорема устанавливает грубость свойства асимптотической устойчивости.

Теорема 4. *Пусть особая точка $O(0, 0, \ldots, 0)$ системы* (1) *является асимптотически устойчивой точкой.*

Можно указать непрерывную функцию $\eta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, положительную всюду, кроме точки O, и притом такую, что при выполнении неравенства (4) *точка O будет асимптотически устойчивой и для системы* (3).

В доказательстве этого результата используется теорема 3 и теорема А. М. Ляпунова об асимптотической устойчивости ([7]).

Поступило
25 III 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Eilenberg, Ann. of Math., 48, No. 3, 670 (1947). [2] В. Немыцкий, Annali di Mat., ser. IV, 14 (1935—36). [3] E. Kamke, Math. Zs., 41, 56 (1936). [4] Е. А. Барбашин, ДАН, 61, № 2 (1948). [5] J. L. Massera, Ann. of Math., 50, № 3, 717 (1949). [6] И. Г. Малкин, Изв. физ.-мат. об-ва, Казань, (3), 5, 63 (1931). [7] А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, 1935, стр. 57.