Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

К. В. РУППЕНЕЙТ

СЖАТИЕ ЦИЛИНДРА МЕЖДУ ДВУМЯ ШЕРОХОВАТЫМИ ЖЕСТКИМИ ПЛИТАМИ

(Представлено академиком А. А. Скочинским 20 III 1950)

Рассмотрим сжатие цилиндра между двумя шероховатыми жесткими плитами, если условие пластичности для материала цилиндра задано в форме огибающей наибольших кругов напряжений или условием постоянства интенсивности касательных напряжений.

1. При сжатии цилиндрического образца между жесткими плитами торцовые сечения и сечение на середине высоты образца остаются плоскими в процессе деформации. Предположим, что и все сечения, перпендикулярные образующей цилиндра, остаются плоскими в процессе деформации.

Поместим начало координат на оси цилиндра на половине высоты и направим ось Z вверх. Обозначая перемещение вдоль оси Z через U_z и принимая во внимание сделанное замечание о характере деформирования, имеем

$$U_z = U_z(z). \tag{1}$$

Уравнения совместности деформаций в задаче с осевой симметрией имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} + \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{r} = 0,\\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{rz}}{\partial r\, \partial z}.\end{gathered} \tag{2}$$

Принимая, как обычно, что материал в процессе пластической деформации несжимаем, имеем еще одно условие:

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0. \tag{3}$$

На основании зависимости $U_z = U(z)$ имеем

$$\varepsilon_z = U_z'(z). \tag{4}$$

Далее, интегрируя первое уравнение системы (2) с учетом уравнений (3) и (4), получаем

$$\varepsilon_r = \frac{F(z)}{2r^2} - \frac{1}{2} U_z'(z). \tag{5}$$

Но при $r \to 0$ значение ε_r остается ограниченным, отсюда $F(z) = 0$. Таким образом, при сжатии цилиндра из несжимаемого материала между двумя жесткими плитами

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = -\frac{1}{2} U_z'(z) \tag{6}$$

и, следовательно, имеем условие

$$\sigma_r = \sigma_\theta. \tag{7}$$

Интегрируя второе уравнение системы (2) с учетом соотношений (4) и (6) и определяя произвольные функции из условий симметрии, находим

$$\gamma_{rz} = -\frac{1}{2} U_z''(z)\, r. \tag{8}$$

2. Присоединяя найденное условие $\sigma_r = \sigma_\theta$ (7) к уравнениям равновесия и условию пластичности, получаем систему уравнений в напряжениях.

На основании (7) уравнения равновесия упрощаются и будут:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\frac{\tau_{rz}}{r}. \end{gathered} \tag{9}$$

Условие пластичности примем в форме циклоидальной огибающей главных наибольших кругов напряжений*:

$$(\sigma_z - \sigma_r)^2 + 4\tau_{rz}^2 = 4k^2 \sin^2\left(\frac{\sigma_z + \sigma_r}{2k} + \frac{H}{k}\right). \tag{10}$$

Решения уравнения (10) можно принять в следующей форме:

$$\begin{gathered} \left.\begin{matrix} \sigma_z + H \\ \sigma_r + H \end{matrix}\right\} = \frac{k}{2}\left[2(\xi + \eta) \pm (\sin 2\xi + \sin 2\eta)\right]; \\ \tau_{rz} = -\frac{k}{2}(\cos 2\xi - \cos 2\eta). \end{gathered} \tag{11}$$

Внося (11) в (9), получаем основную систему дифференциальных уравнений предельного равновесия:

$$\begin{gathered} \sin\xi\left(\sin\xi \frac{\partial \xi}{\partial r} + \cos\xi \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) + \sin\eta\left(\sin\eta \frac{\partial \eta}{\partial r} - \cos\eta \frac{\partial \eta}{\partial z}\right) = 0, \\ \cos\xi\left(\sin\xi \frac{\partial \xi}{\partial r} + \cos\xi \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) - \cos\eta\left(\sin\eta \frac{\partial \eta}{\partial r} - \cos\eta \frac{\partial \eta}{\partial z}\right) = \\ = \frac{1}{r}(\cos 2\xi - \cos 2\eta). \end{gathered} \tag{12}$$

Уравнения характеристик для системы будут:

$$\frac{dz}{dr} = \operatorname{ctg}\xi, \quad \frac{d\xi}{dr} = -\frac{2\sin\eta \sin(\xi - \eta)}{\sin\xi}, \tag{13}$$

$$\frac{dz}{dr} = -\operatorname{ctg}\eta, \quad \frac{d\eta}{dr} = \frac{2\sin\xi \sin(\xi - \eta)}{\sin\eta}. \tag{14}$$

---

* Уравнение огибающей в форме циклоиды и выражения для компонент напряжений (11) предложены В. В. Соколовским (²).

Уравнения (13) и (14) могут быть преобразованы к новым переменным α и β:

$$\cos\xi \frac{\partial r}{\partial \beta} - \sin\xi \frac{\partial z}{\partial \beta} = 0, \qquad \cos\eta \frac{\partial r}{\partial \alpha} + \sin\eta \frac{\partial z}{\partial \alpha} = 0,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \beta} = -\frac{2\sin\eta \sin(\xi-\eta)}{r\sin\xi} \frac{\partial r}{\partial \beta}, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} = \frac{2\sin\xi \sin(\xi-\eta)}{r\sin\eta} \frac{\partial r}{\partial \alpha}. \tag{15}$$

К уравнениям (15) применим метод численного интегрирования.

Постановка краевых задач для уравнений (15) ничем не отличается от изложенной В. В. Соколовским [1].

Заметим, что уравнения (13) и (14) имеют интеграл

$$\xi_0 = \eta_0 = \mathrm{const}_1,$$

$$z = r \operatorname{ctg} \xi_0 + \mathrm{const}_2, \tag{16}$$

$$z = -r \operatorname{ctg} \eta_0 + \mathrm{const}_3.$$

Сетка характеристических линий состоит из двух семейств параллельных прямых (16). Компоненты напряжений будут

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \tau_{rz} = 0,$$

$$\sigma_z = k[2\xi_0 + \sin 2\xi_0] - H, \tag{17}$$

и ξ_0 находится из условия

$$H = k[2\xi_0 - \sin 2\xi_0]. \tag{18}$$

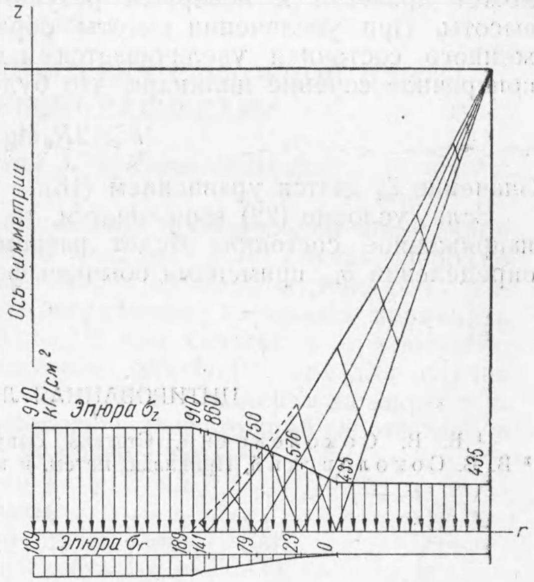

Рис. 1

Напряженное состояние, соответствующее описанному частному решению, имеет место в областях, ограниченных боковой поверхностью цилиндра.

Принимая вместо условия (10) уравнение, выражающее постоянство интенсивности напряжений сдвига, приходим к системе уравнений:

$$\frac{\partial \omega}{\partial r} + \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} + \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\sin 2\varphi}{2r}. \tag{19}$$

Характеристики системы (19), преобразованные к переменным α и β, будут:

$$\frac{\partial z}{\partial \beta} = -\operatorname{tg}\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\frac{\partial r}{\partial \beta}, \qquad \frac{\partial z}{\partial \alpha} = -\operatorname{tg}\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\frac{\partial r}{\partial \alpha}, \tag{20}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \beta} - \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = \frac{\sin 2\varphi}{2r} \frac{\sin\varphi + \cos\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi} \frac{\partial r}{\partial \beta}, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = -\frac{\sin 2\varphi}{2r} \frac{\cos\varphi - \sin\varphi}{\cos\varphi + \sin\varphi} \frac{\partial r}{\partial \alpha}.$$

Уравнения (19) имеют частное решение $\varphi = \varphi_0 = 0$ или $\pi/2$ и $\omega = \mathrm{const}$, аналогичное рассмотренному частному решению уравнений (12).

На рис. 1 построена часть сетки линий скольжения и эпюры напряжений σ_r и σ_z по сечению на половине высоты образца при следующих данных: радиус цилиндра $R_0 = 1$ см, высота цилиндра $h = 2$ см, параметры прочности $k = 360$ кГ / см², $H = 16$ кГ / см².

3. Выводы. Задача о сжатии цилиндра между жесткими плитами имеет значение при обработке результатов механических испытаний на сжатие.

Из приведенного решения следует, что напряженное состояние образцов является сложным. Определение предела прочности на сжатие по формуле

$$\sigma_{\text{вр}} = \frac{P_{\text{разруш}}}{F} \tag{21}$$

может привести к неверным результатам для образцов небольшой высоты. При увеличении высоты образца область одноосного напряженного состояния увеличивается и может распространиться на все поперечное сечение цилиндра, что будет иметь место при

$$h \geqslant 2R_0 \operatorname{ctg} \xi_0. \tag{22}$$

Значение ξ_0 дается уравнением (18).

Если условие (22) выполняется, то в серединном сечении образца напряженное состояние будет равномерным и, следовательно, для определения $\sigma_{\text{вр}}$ применима обычная формула.

Поступило
20 III 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Соколовский, Статика сыпучей среды, Изд. АН СССР, 1942.
[2] В. В. Соколовский, Прикладн. матем. и мех., 13, № 4 (1919).