Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 2

МАТЕМАТИКА

С. Н. ЧЕРНИКОВ

О ЦЕНТРАЛИЗАТОРЕ ПОЛНОГО АБЕЛЕВОГО НОРМАЛЬНОГО ДЕЛИТЕЛЯ В БЕСКОНЕЧНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ГРУППЕ

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 1 II 1950)

Введение. В настоящей заметке решается вопрос о соотношении между централизатором полной абелевой подгруппы в бесконечной периодической группе $\mathfrak{P}$ и централизаторами в группе $\mathfrak{P}$ нижних слоев элементов этой подгруппы (теорема 2). Полученный в теореме 2 результат позволяет решить вопрос о строении произвольной p-группы, обладающей возрастающим центральным рядом, в случае, когда хотя бы один ее максимальный абелев нормальный делитель является специальной группой (теорема 4).

1. Лемма 1. *Пусть p — нечетное простое число и $\mathfrak{P}$ — такое расширение некоторой бесконечной абелевой p-группы $\mathfrak{A}$, что фактор-группа $\mathfrak{P}/\mathfrak{A}$ циклическая p-го порядка. Если центр группы $\mathfrak{P}$ конечен, то он не может содержать все элементы p-го порядка из максимальной полной подгруппы группы $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Пусть P — произвольный представитель какого-нибудь смежного класса, порождающего группу $\mathfrak{P}/\mathfrak{A}$. Тогда в группе $\mathfrak{A}$ можно выделить последовательность отличных друг от друга элементов

$$A_0 = 1,\ A_1,\ A_2, \ldots, A_n, \ldots,$$

удовлетворяющих соотношению $P^{-1} A_n P = A_n A_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$ (см. [1]). Полагая $A_i = A_0$ при $i < 0$, отсюда легко получить для любого натурального числа m соотношение

$$P^{-m} A_n P^m = A_n A_{n-1}^{\binom{m}{1}} A_{n-2}^{\binom{m}{2}} \cdots A_{n-m}^{\binom{m}{m}};$$

здесь $\binom{m}{i}$ — число сочетаний из m элементов по i.

Полагая в этом соотношении $m = p$, из него последовательно для $n = 2, 3, \ldots, p$ получаем $A_1^p = 1$, $A_2^p = 1, \ldots, A_{p-1}^p = 1$. Так как все элементы $A_1, A_2, \ldots, A_{p-1}$ отличны друг от друга и от единицы, содержатся в максимальной полной подгруппе группы $\mathfrak{A}$ (см. [1], § 4) и, очевидно, не содержатся, за исключением элемента A_1, в центре группы $\mathfrak{P}$, то утверждение леммы доказано.

Аналогично доказывается

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{P}$ — такое расширение некоторой бесконечной 2-группы $\mathfrak{A}$, что фактор-группа $\mathfrak{P}/\mathfrak{A}$ — циклическая группа порядка 2. Если центр группы $\mathfrak{P}$ конечен, то он не может содержать все элементы максимальной полной подгруппы группы $\mathfrak{A}$, имеющие порядок 2^2.*

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{P}$ — такое расширение бесконечной полной p-группы $\mathfrak{A}$, что фактор-группа $\mathfrak{P}/\mathfrak{A}$ — циклическая p-группа. Если центр группы $\mathfrak{P}$ содержит все элементы группы $\mathfrak{A}$, имеющие порядок p^2, то группа $\mathfrak{P}$ коммутативна. Если p — нечетное простое число, то для коммутативности группы $\mathfrak{P}$ достаточно, чтобы все элементы группы $\mathfrak{A}$, имеющие порядок p, содержались в центре группы $\mathfrak{P}$.*

Доказательство. Пусть p — нечетное простое число. Рассмотрим сперва случай, когда группа $\mathfrak{A}$ разлагается в прямое произведение конечного множества квази-циклических групп, а фактор-группа $\mathfrak{P}/\mathfrak{A}$ имеет порядок p. Так как все элементы p-го порядка из группы $\mathfrak{A}$ содержатся в центре группы $\mathfrak{P}$, то, ввиду леммы 1, центр группы $\mathfrak{P}$ бесконечен и, значит, его максимальная полная подгруппа $\mathfrak{A}_1$ отлична от единицы. Если $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}$, то группа $\mathfrak{P}$ коммутативна. Если же $\mathfrak{A}_1 \neq \mathfrak{A}$, то фактор-группа $\mathfrak{P}/\mathfrak{A}_1$ и ее подгруппа $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_1$, очевидно, удовлетворяют условиям леммы 1. Следовательно, максимальная полная подгруппа $\mathfrak{A}_2/\mathfrak{A}_1$ центра группы $\mathfrak{P}/\mathfrak{A}_1$ отлична от единицы. Продолжая эти рассуждения, мы получим ряд

$$\mathfrak{A}_0 = 1 \subset \mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{A}_l = \mathfrak{A} \subset \mathfrak{P},$$

являющийся, очевидно, возрастающим центральным рядом группы $\mathfrak{P}$. Так как этот ряд имеет конечную длину, то максимальная полная подгруппа группы $\mathfrak{P}$, т. е. группа $\mathfrak{A}$, содержится в ее центре. Отсюда без труда получается коммутативность группы $\mathfrak{P}$ в рассматриваемом случае.

Пусть порядок группы $\mathfrak{P}/\mathfrak{A}$ равен p^k при $k > 1$ и для всех $l < k$ коммутативность группы $\mathfrak{P}$ доказана. Тогда группа $\mathfrak{P}'$, порожденная элементами группы $\mathfrak{A}$ и элементом P^p, где P — произвольный представитель смежного класса, порождающего группу $\mathfrak{P}/\mathfrak{A}$, коммутативна. Так как группа $\mathfrak{P}/\mathfrak{P}'$ имеет порядок p, а группа $\mathfrak{A}$ является максимальной полной подгруппой $\mathfrak{P}'$, удовлетворяющей условию леммы 1, то группа $\mathfrak{P}$ имеет бесконечный центр. Но тогда максимальная полная подгруппа $\mathfrak{A}_1$ этого центра бесконечна. Переходя к фактор-группе $\mathfrak{P}/\mathfrak{A}_1$ и проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, получаем коммутативность группы $\mathfrak{P}$.

Пусть теперь группа $\mathfrak{A}$ разлагается в прямое произведение бесконечного множества квази-циклических групп. Если P — выбранный выше элемент группы $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$ — произвольная ее квази-циклическая подгруппа, то группа $\{\mathfrak{Q}, P\}$, порожденная элементами группы $\mathfrak{Q}$ и элементом P, удовлетворяет условиям рассмотренного случая. Ввиду произвольности $\mathfrak{Q}$ отсюда вытекает коммутативность группы $\mathfrak{P}$.

Для доказательства леммы в случае $p = 2$ следует повторить рассуждения для p нечетного и сослаться на лемму 2 вместо леммы 1.

Примечание. При $p = 2$ вторая часть теоремы теряет силу.

2. Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{P}$ — такое расширение слойно-конечной (т. е. обладающей конечным множеством элементов каждого порядка) абелевой группы $\mathfrak{A}$, что фактор-группа $\mathfrak{P}/\mathfrak{A}$ циклическая. Если центр группы $\mathfrak{P}$ содержит все элементы группы $\mathfrak{A}$, имеющие простой порядок, то группа $\mathfrak{P}$ обладает возрастающим центральным рядом.*

Доказательство. Если группа $\mathfrak{P}$ не обладает возрастающим центральным рядом и P — произвольный представитель смежного класса, порождающего фактор-группу $\mathfrak{P}/\mathfrak{A}$, то в группе $\mathfrak{A}$ существует, ввиду ее слойной конечности, отличный от единицы элемент A, удовлетворяющий коммутаторному соотношению

$$[\cdots[[A, P], P], \ldots, P] = A.$$

Так как элемент A отличен от единицы и все элементы группы $\mathfrak{A}$, имеющие простой порядок, содержатся в центре группы $\mathfrak{P}$, то из полученного соотношения вытекает, что порядок элемента A можно представить в виде p^2n, где p — некоторое простое число. Возведя обе части этого соотношения в степень pn, получаем соотношение

$$[\cdots[[A^{pn}, P], P], \ldots, P] = A^{pn} \neq 1,$$

противоречащее предположению леммы об элементах группы $\mathfrak{A}$, имеющих простой порядок.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{P}$ — такое расширение полной периодической абелевой группы $\mathfrak{A}$, что фактор-группа $\mathfrak{P}/\mathfrak{A}$ является циклической группой конечного порядка. Если центр группы $\mathfrak{P}$ содержит все элементы из $\mathfrak{A}$, порядок которых равен квадрату простого чила, то группа $\mathfrak{P}$ коммутативна. Если одна из групп $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{P}/\mathfrak{A}$ не содержит элементов четного порядка, то для коммутативности группы $\mathfrak{P}$ достаточно, чтобы все элементы группы $\mathfrak{A}$, имеющие простой порядок, содержались в центре группы $\mathfrak{P}$.*

Доказательство. Если $\mathfrak{Q}$ — произвольная квази-циклическая подгруппа группы $\mathfrak{A}$ и P — произвольный представитель смежного класса группы $\mathfrak{P}/\mathfrak{A}$, то группа $\{\mathfrak{Q}, P\}$, порожденная элементами группы $\mathfrak{Q}$ и элементом P, является, очевидно, расширением полной слойноконечной группы с помощью циклической группы конечного порядка. Так как все элементы расширяемой группы, имеющие простой порядок содержатся, очевидно, в центре группы $\{\mathfrak{Q}, P\}$, то эта группа обладает возрастающим центральным рядом и, значит, разлагается в прямое произведение своих силовских подгрупп. Опираясь на лемму 3 и учитывая произвольность группы $\mathfrak{Q}$, отсюда уже нетрудно получить уверждение теоремы о группе $\mathfrak{P}$.

Опираясь на доказанную теорему, можно сформулировать следующее более общее предложение.

Теорема 2. *Если $\mathfrak{A}$ — такой полный абелев нормальный делитель периодической группы $\mathfrak{P}$, все элементы которого, имеющие порядок, равный квадрату простого числа, содержатся в центре группы $\mathfrak{P}$, то в центре группы $\mathfrak{P}$ содержится вся группа $\mathfrak{A}$. Если порядки элементов одной из групп $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{P}/\mathfrak{A}$ нечетны, то для вхождения группы $\mathfrak{A}$ в центр группы $\mathfrak{P}$ достаточно, чтобы все элементы группы $\mathfrak{A}$, имеющие простой порядок, содержались в центре группы $\mathfrak{P}$.*

Следствие 1. *Если $\mathfrak{A}$ — полный абелев нормальный делитель периодической группы $\mathfrak{P}$, то его централизатор в $\mathfrak{P}$ совпадает с централизатором подгруппы группы $\mathfrak{A}$, составленной всеми элементами последней, имеющими порядок, не делящийся на куб простого числа. При нечетности порядков элементов одной из групп $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{P}/\mathfrak{A}$ здесь куб можно заменить квадратом.*

Следствие 2. *В периодической группе $\mathfrak{P}$ централизатор каждого слойно-конечного абелевого нормального делителя $\mathfrak{A}$ имеет конечный индекс.*

Теорема 3. *Если хотя бы одна максимальная абелева подгруппа произвольной бесконечной периодической группы $\mathfrak{P}$ слойно-конечна и инвариантна в $\mathfrak{P}$, то группа $\mathfrak{P}$ является расширением прямого произведения конечного числа квази-циклических групп с помощью конечной группы.*

Доказательство. Если фактор-группа $\mathfrak{P}/\mathfrak{A}$ бесконечна, то, ввиду следствия 2 теоремы 2, централизатор $z(\mathfrak{A})$ группы $\mathfrak{A}$ отличен от $\mathfrak{A}$. Однако это противоречит максимальности группы $\mathfrak{A}$. Следовательно, $\mathfrak{P}/\mathfrak{A}$ — конечная группа, но тогда группа $\mathfrak{P}$ удовлетворяет условию теоремы.

3. Лемма 5. *В группе $\mathfrak{G}$, обладающей возрастающим центральным рядом, каждый максимальный абелев нормальный делитель $\mathfrak{N}$ является ее максимальной абелевой подгруппой**.

Доказательство легко получить, опираясь на лемму 2 из ([2]). Эта лемма позволяет вывести из теоремы 3 следующее предложение.

Теорема 4. *Если хотя бы один из максимальных абелевых нормальных делителей бесконечной группы $\mathfrak{P}$, обладающей возрастающим центральным рядом, является специальной группой, т. е. является расширением прямого произведения конечного числа квазициклических p-групп с помощью конечной p-группы, то группа $\mathfrak{P}$ — также специальная.*

Если условиться называть специальной группу $\mathfrak{G}$, обладающую возрастающим центральным рядом и таким нормальным рядом конечной длины, произвольный фактор которого изоморфен подгруппе какой-нибудь квази-циклической группы, либо подгруппе аддитивной группы рациональных чисел, то теорема 4 будет справедливой в случае, когда $\mathfrak{P}$ — группа без кручения. Однако, как показывает пример, в случае смешанной группы $\mathfrak{P}$ эта теорема теряет силу.

Пример. Пусть

$$p_1 < p_2 < \cdots < p_n < \cdots$$

бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел, удовлетворяющих условию

$$p_n \equiv 1 \pmod{p_m}, \quad m < n, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Пусть, далее, $\mathfrak{A}$ — квази-циклическая p-группа и X_n — ее автоморфизм, переводящий произвольный элемент $A \subset \mathfrak{A}$ в $A^{1+p+p^2+\cdots+p^{p_n-1}}$. Пользуясь сравнениями, связывающими числа p_n друг с другом, легко показать, что свободная абелева группа $\mathfrak{N}$, порожденная элементами $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, не содержит отличных от единицы, дающих тождественный автоморфизм группы $\mathfrak{A}$.

Обозначим через $\mathfrak{P}$ группу, порожденную элементами групп $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{N}$ при условии, что для элементов каждой из этих групп сохраняются ее соотношения и в группе $\mathfrak{P}$, а для элементов $A \subset \mathfrak{A}$ и $X_n \subset \mathfrak{N}$, $n = 1, 2, \ldots$, имеют место соотношения

$$X_n^{-1} A X_n = A^{1+p+p^2+\cdots+p^{p_n-1}}.$$

Группа $\mathfrak{P}$ обладает возрастающим центральным рядом, имеет максимальный абелев нормальный делитель $\mathfrak{A}$, являющийся специальной группой, но сама не является специальной.

Так как группа $\mathfrak{A}$ является, очевидно, единственным максимальным абелевым нормальным делителем группы $\mathfrak{P}$, то в случае смешанной группы утверждение теоремы 4 может не быть справедливым даже при условии, что все максимальные абелевы нормальные делители этой группы специальны.

Поступило
24 XI 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Черников, Матем. сборн., 17, 397 (1945). [2] С. Н. Черников, Матем. сборн., 22 (64), 2, 319 (1948).

---

* Настоящее предложение сообщил мне Н. Ф. Сесекин.