Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 2

МАТЕМАТИКА

В. В. ХОРОШИЛОВ

О РЕШЕНИЯХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИРРЕГУЛЯРНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКОЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 10 III 1950)

В работе [1] мы рассматривали систему n уравнений вида

$$\frac{dY}{dt} = Y\left[P_0 + \frac{P_1}{t} + \frac{P_2}{t^2} + \cdots\right], \tag{1'}$$

где Y — матрица фундаментальной системы решений; P_k $(k=0, 1, \ldots)$ — постоянные матрицы n-го порядка и P_0 имеет характеристические числа с неравными вещественными частями. Методом последовательных приближений, построенным Н. П. Еругиным, при указанных выше свойствах P_0, решения системы уравнений (1′) были получены в виде рядов, равномерно сходящихся на бесконечном промежутке $t<\infty$, из которых просто получаются и асимптотические разложения.

С помощью другого метода последовательных приближений, также построенного Н. П. Еругиным [2], применимого только к системе двух уравнений, можно получить решения в виде рядов, сходящихся быстрее, чем в первом методе. Кроме того, с помощью этого метода можно изучить общий случай, когда матрица второго порядка P_0 имеет диагональный вид $P_0 = [a_1,\ a_2]$ и

I. $\operatorname{Re}(a_1) \neq \operatorname{Re}(a_2)$.

II. $\operatorname{Re}(a_1) = \operatorname{Re}(a_2)$.

На основании этого же метода рассматривается и такая система, где

III. $P_0 = \begin{Vmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{Vmatrix}$.

В случае I мы получаем фундаментальную систему решений в виде

$$y_{kl} = e^{a_k t}\, t^{\overset{(1)}{p}_{kk}}\, z_{kl}(t) \quad (l,\ k = 1,\ 2), \tag{1}$$

где k — номер решения, l — номер неизвестной функции, $p^{(1)}_{kl} = \{P_1\}_{kl}$ и $z_{kl}(t)$ представимы в виде рядов, равномерно сходящихся в промежутке $t<\infty$, причем

$$\begin{aligned} &z_{kl}(t) \to 0 \quad \text{при } t\to\infty, \quad k\neq l; \\ &z_{kk}(t) \to 1 \quad \text{при } t\to\infty. \end{aligned} \tag{2}$$

Если выполнено условие II, то фундаментальную систему решений получаем в виде:

$$\begin{aligned} y_{11} &= e^{a_1 t}\, t^{\overset{(1)}{p}_{11}}\, z_{11}(t), & y_{12} &= e^{a_1 t}\, t^{\overset{(1)}{p}_{11}}\, z_{12}(t), \\ y_{21} &= e^{a_2 t}\, t^{\overset{(1)}{p}_{22}+1}\, z_{21}(t), & y_{22} &= e^{a_2 t}\, t^{\overset{(1)}{p}_{22}}\, z_{22}(t), \end{aligned} \tag{3}$$

где $a_1 = a + ib$, $a_2 = a - ib$ $(i = \sqrt{-1})$ и $z_{kl}(t)$ обладают свойствами (2).

При условии III, когда $p_{12}^{(1)} \neq 0$, фундаментальную систему получим в виде:

$$\begin{aligned} y_{11} &= e^{at+\rho_1\sqrt{t}}\, t^{(\sigma+1)/2} z_{11}(t), \quad y_{12} = e^{at+\rho_1\sqrt{t}}\, t^{(\sigma+1)/2} z_{12}(t), \\ y_{21} &= e^{at+\rho_2\sqrt{t}}\, t^{(\sigma+2)/2} z_{21}(t), \quad y_{22} = e^{at+\rho_2\sqrt{t}}\, t^{\sigma/2} z_{22}(t), \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\rho_1 = 2\sqrt{p_{12}^{(1)}}, \quad \rho_2 = -2\sqrt{p_{12}^{(1)}}, \quad \sigma = p_{11}^{(1)} + p_{22}^{(1)} - {}^1/_2 \tag{5}$$

и $z_{kl}(t)$ обладают свойствами (2).

При $p_{12}^{(1)} = 0$ простое преобразование переводит систему в другую, для которой $t = \infty$ будет регулярной особой точкой. Во всех случаях функции $z_{kl}(t)$ легко представить в виде асимптотических рядов.

Все эти результаты переносятся и на уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(a_0 + \frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \cdots\right)\frac{dy}{dt} + \left(b_0 + \frac{b_1}{t} + \frac{b_2}{t^2} + \cdots\right)y = 0.$$

Для уравнения Уиттекера

$$\frac{d^2w}{dt^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{t} + \frac{{}^1/_4 - m^2}{t^2}\right)w = 0$$

получаем решения в виде

$$w_1 = e^{{}^1/_2 t}\, t^{-k} z_1(t), \quad w_2 = e^{-{}^1/_2 t}\, t^k z_2(t),$$

где $z_1(t)$ и $z_2(t)$ представлены в виде рядов, равномерно сходящихся в промежутке (t_0, ∞), и для $z_1(t)$, $z_2(t)$ легко получаем асимптотические разложения

$$z_l(t) = 1 + \frac{c_{l_1}}{t} + \cdots + \frac{c_{ln}}{t^n} + \frac{\lambda_{ln}(t)}{t^n},$$

где $\lambda_{ln}(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Для уравнения Бесселя

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} + \left(1 - \frac{n^2}{t^2}\right)y = 0$$

получаем

$$y_k = e^{(-1)^{k+1} it}\, t^{-{}^1/_2} z_k(t) \quad (k = 1,\ 2),$$

где $z_1(t)$, $z_2(t)$ обладают свойствами предыдущего примера.

Все эти рассуждения соответственно применимы и в том случае, когда коэффициенты не являются аналитическими функциями, а представимы в виде

$$\varphi(t) = a + \frac{b}{t} + O(t^{1+\alpha}),$$

где a и b постоянные и $\alpha > 0$.

Поступило
23 II 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. И. Смирнов, Курс высшей математики, 3, ч. 2, 1949, стр. 469. [2] Н. П. Еругин, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 13 (1946).