Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 2

МАТЕМАТИКА

Ю. М. БЕРЕЗАНСКИЙ и С. Г. КРЕЙН

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ КОНТИНУАЛЬНЫХ АЛГЕБР

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 7 X 1949)

В этой заметке мы рассматриваем специальные классы континуальных алгебр (см. ([1])). Для таких алгебр удается доказать ряд теорем, обобщающих соответствующие теоремы относительно группового кольца компактной коммутативной группы.

1°. Алгебру, построенную по структурной мере $C(A, B, q)$, назовем нормальной, если между точками компакта Q можно установить взаимно-однозначное соответствие $q \to q^*$, переводящее борелевские множества в борелевские и такое, что $(q^*)^* = q$, $C(A, B, D) = C(D, B^*, A)$ $(A, B, D \in [Q],\ q \in Q)$*.

Из $m(Q)\, m(E) = C(Q, E, Q) = C(Q, E^*, Q) = m(Q)\, m(E^*)$ следует, что мультипликативная мера m инвариантна относительно*.

Каждая из алгебр 4° — 6° заметки ([1]) нормальна. В примере 4° нужно положить $g^* = g^{-1}$ $(g \in G)$, в примерах 5° и 6° $q^* = q$ $(q \in Q)$.

2°. При любом $D \in [Q]$ $C(A, B, D) = C(D, A^*, B) \leqslant C(D, A^*, Q) = m(D)\, m(A^*) = m(D)\, m(A)$, поэтому $C(A, B, q) \leqslant m(A)$ $(A, B \in [Q], q \in Q)$.

С помощью этого неравенства из непрерывности композиции характеристических функций $((\varkappa_A * \varkappa_B)(q) = C(A, B, q))$ следует

Лемма. *В нормальной алгебре композиция суммируемой функции с ограниченной непрерывна.*

Следствие. В случае недискретного Q нормальная алгебра не содержит единицы.

Теорема 1. *Нормальная алгебра обладает не более чем счетным числом характеров, являющихся непрерывными эрмитовыми $(\chi(q) = \overline{\chi(q^*)}$, $q \in Q)$ ортогональными друг к другу функциями.*

Доказательство. Для любых $A, B \in [Q]$ имеем

$$\chi(A)\chi(B) = \int C(A, B, q)\chi(q)\, dq = \int \chi(q)\, d_q C(A, B, E_q) =$$

$$= \int \chi(q)\, d_q C(E_q, B^*, A) = \int_A (\chi * \varkappa_{B^*})(d)\, dq,$$

откуда

$$\chi(t)\chi(B) = (\chi * \varkappa_{B^*})(t) \quad (B \in [Q]). \tag{1}$$

Непрерывность характера χ следует из этого равенства и леммы. Эрмитовость характеров вытекает из справедливого при любом $E \in [Q]$ равенства

* Мы придерживаемся обозначений заметки ([1]), так что $C(A, B, D) = \int_D C(A, B, q)\, dq$.

$$\chi(E)\int|\chi(t)|^2dt=\int\left(\int\overline{\chi(t)}\,d_t\,C(E_t,E_q)\right)\chi(q)\,dq=$$

$$=\int\chi(q)\,d_q\left(\int\overline{\chi(t)}\,d_tC(E_t,E,E_q)\right)=\int\chi(q)\,d_q\left(\int\overline{\chi(t)}\,d_t\,C(E_q,E^*,E_t)\right)=$$

$$=\int\overline{\chi(t)}\,d_t\left(\int\chi(q)\,d_q\,C(E_q,E^*,E_t)\right)=\overline{\chi(E^*)}\int|\chi(q)|^2dq.$$

Для доказательства ортогональности двух характеров χ и θ $(\chi\neq\theta)$ выберем такое $B\in[Q]$, что $\chi(B)\neq\theta(B)=\overline{\theta(B^*)}$; тогда при помощи (1) получим

$$[\chi(B)-\overline{\theta(B^*)}]\int\chi(t)\,\overline{\theta(t)}\,dt=\int(\chi*\varkappa_{B^*})(t)\,\overline{\theta(t)}\,dt-\int(\overline{\theta}*\varkappa_B)(t)\chi(t)\,dt=$$

$$=\int\left(\int\chi(\tau)\,d_\tau\,C(E_\tau,B^*,t)\right)\overline{\theta(t)}\,dt-\int\left(\int\overline{\theta(t)}\,d_\tau\,C(E_\tau,B,t)\right)\chi(t)\,dt=$$

$$=\int\overline{\theta(t)}\,d_t\left(\int\chi(\tau)\,d_\tau\,C(E_\tau,B^*,E_t)\right)-\int\chi(t)\,d_t\left(\int\overline{\theta(t)}\,d_\tau\,C(E_\tau,B,E_t)\right)=0.$$

Следствие 1. Мультипликативная мера в нормальной алгебре единственна.

Следствие 2. Функции $j(t)=\chi(t)\left(\int|\chi(t)|^2dt\right)^{-1}$ являются ортогональными идемпотентами алгебры (т. е. $j*j=j$, $j*j'=0$ при $j\neq j'$). Каждый другой идемпотент представим в виде конечной суммы функций $j(t)$.

Из эрмитовости характеров легко следует, что нормальная алгебра превращается в симметричное кольцо, если положить $(\lambda e+x(t))^*=$ $=\overline{\lambda}e+\overline{x(t^*)}$.

3°. Если у нормальной алгебры отсутствует радикал, то ее характеры образуют полную систему в L_2. В общем случае структура радикала описывается следующей теоремой.

Теорема 2. *Радикал нормальной алгебры совпадает с совокупностью элементов $x\in L_1$, для которых $x*y$ при любом $y\in L_1$ служит аннулятором ($z\in L_1$ называется аннулятором, если $z*u=0$ для любого $u\in L_1$).*

Доказательство*. Достаточно показать, что каждый элемент из радикала R обладает указанным свойством. Пусть $z(t)\in R$ — в существенном ограниченная функция; рассмотрим в L_2 оператор $S_zx=$ $=z*x$ $(x\in L_2)$; легко видеть, что он ограничен. Его спектр состоит только из нуля; в самом деле, при $\lambda\neq0$ существует $(z-\lambda e)^{-1}=$ $=y-\frac{1}{\lambda}e$, причем y удовлетворяет соотношению $y=\frac{1}{\lambda}\left(y*z-\frac{1}{\lambda}z\right)$. Из этого соотношения и леммы заключаем, что $y(t)$ ограничена, поэтому оператор S_y $(S_yx=y*x,\ x\in L_2)$ непрерывен в L_2. Очевидно, $(S_z-\lambda E)^{-1}=S_y-\frac{1}{\lambda}E$, таким образом, спектр S_z состоит из нуля, и, так как S_z нормален, то $S_z=0$, т. е. $z*u=0$ для любого $u\in L_2$. В силу плотности L_2 в L_1 в норме L_1 это равенство имеет место для всех $u\in L_1$, т. е. z — аннулятор. Пусть теперь $x\in R$ произвольно; если $y(t)$ ограниченная функция, то $z=x*y\in R$ и непрерывна, поэтому $x*y*u=z*u=0$ при любом $u\in L_1$. Для завершения доказательства достаточно отметить, что ограниченные функции плотны в L_1.

Из доказанной теоремы получаем следующий критерий полупростоты.

---

* Идея этого доказательства заимствована у Сегала ([2]).

Для полупростоты нормальной алгебры необходимо и достаточно, чтобы она не содержала отличных от нуля аннуляторов.

4°. Будем говорить, что нормальная алгебра обладает полюсом o, если существует такая точка $o \in Q$, что $C(A, B, o) = m(A^* \cap B)$ для всех борелевских A, B.

Нетрудно убедиться, что для конечномерной нормальной алгебры полюс является единицей алгебры, лежащей в базисе.

Каждая из алгебр 4°—6° ([1]) обладает полюсом. В примерах 5° и 6° полюсом служит точка $+1$, в примере 4° — единица группы.

Теорема 3. *Нормальная алгебра с полюсом полупростая.*

Доказательство. Пусть $U_1 \supset U_2 \supset \ldots \ni o$ — последовательность сфер в Q, стягивающихся к полюсу o алгебры, а $e_n(t)$ — характеристическая функция сферы U_n, деленная на $m(U_n)$. Для каждой в существенном ограниченной функции $f(q)$ и любого $A \in [Q]$ имеем

$$\int (\varkappa_A * e_n)(q) f(q)\, dq = \frac{1}{m(U_n)} \int f(q)\, d_q C(A, U_n, E_q) =$$

$$= \frac{1}{m(U_n)} \int f(q)\, d_q C(E_q, A^*, U_n) = \frac{1}{m(U_n)} \int\limits_{U_n} (f * \varkappa_{A^*})(t)\, dt.$$

В силу леммы $(f * \varkappa_{A^*})(t)$ непрерывна по t, поэтому

$$\int (\varkappa_A * e_n)(q) f(q)\, dq \xrightarrow[n \to \infty]{} (f * \varkappa_{A^*})(o) = \int f(t)\, d_t C(E_t, A^*, o) =$$

$$= \int f(t)\, d_t\, m(E_t \cap A) = f(A).$$

Из полученного соотношения заключаем, что $x * e_n$ слабо сходится в L_1 к x для ступенчатых $x(t)$. Так как ступенчатые функции плотны в L_1, а $\| e_n \| = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то эта сходимость имеет место для каждой суммируемой $x(t)$. Пользуясь этим, покажем, что алгебра не содержит отличных от нуля аннуляторов.

Пусть $x \neq 0$ — аннулятор, по теореме Гана найдется функционал l такой, что $l(x) \neq 0$. Вместе с тем $0 = l(x * e_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} l(x)$, что абсурдно. Теорема доказана.

Отметим, что для того чтобы точка $q_0 \in Q$ была полюсом нормальной полупростой алгебры, необходимо и достаточно выполнение равенства $\chi(q_0) = 1$ для всех характеров.

5°. Теорема 4. *Если коэффициенты Фурье в существенном ограниченной функции $\varphi(t)$ $(t \in Q)$ при ее разложении по характерам нормальной алгебры с полюсом неотрицательны, то ряд Фурье сходится абсолютно и равномерно.*

Доказательство теоремы ведется методом Рисса — Райкова ([3, 4]), причем позитивный функционал F, участвующий в этом доказательстве, строится по формуле

$$F(\lambda e + x) = \lambda \| F \| + \int x(t) \varphi(t)\, dt \quad \left(\| F \| = \operatorname*{vrai\,max}_{t \in Q} | \varphi(t) |, \quad x \in L_1 \right).$$

Позитивность F следует из неравенства $| F(x) |^2 \leqslant \| F \| F(x * x^*)$ $(x \in L_1)$, получаемого из легко проверяемого неравенства $| F(x * y^*) |^2 \leqslant F(x * x^*) F(y * y^*)$ $(x, y \in L_1)$ заменой $y(t)$ на $e_n^*(t)$ (см. доказательство теоремы 3) и переходом к пределу по $n \to \infty$.

6°. Применяя теорему 4 к алгебре 5° ([1]), получаем обобщение теоремы об абсолютной сходимости тригонометрического ряда Фурье в существенном ограниченной функции с неотрицательными коэффициентами Фурье на случай разложения по полиномам Лежандра.

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
7 X 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. М. Березанский и С. Г. Крейн, ДАН, **72**, № 2 (1950). [2] J. Segal, Trans. Am. Math. Soc., **61**: 1 (1947). [3] Д. А. Райков, Тр. Матем. ин-та им. Стеклова АН СССР, **14** (1945). [4] И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов, Усп. матем. наук, **1**, 2 (12) (1946).