Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 1

ФИЗИКА

А. А. ХАРКЕВИЧ

НОВЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДИФРАКЦИОННЫХ ЗАДАЧ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 3 III 1950)

§ 1. Сущность предлагаемого метода сводится к следующему:

1. Данная дифракционная задача формулируется как краевая с определенными условиями на границах некоторой области.

2. Эта область преобразовывается (вещественно) так, чтобы граничные условия сохранились, но чтобы поле в преобразованной области могло быть непосредственно выражено в квадратурах, как в элементарной задаче излучения.

3. При помощи формул, выражающих выбранное преобразование области, из решения вспомогательной задачи излучения получается искомое решение дифракционной задачи.

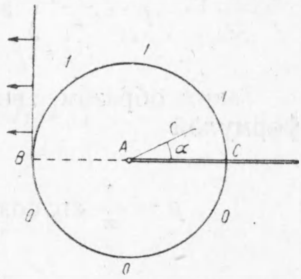

Рис. 1

§ 2. Поясним метод на примере. Пусть ищется поле, возникающее при дифракции единичной плоской разрывной волны давления от прямолинейного края полубесконечного экрана. Волна распространяется параллельно плоскости экрана и фронт ее достигает экрана в момент $t=0$. Перед фронтом единичной волны давление равно нулю, позади фронта — единице. Дифракционное явление развивается в цилиндре радиуса ct. Ось цилиндра—край экрана; задача является плоской. Граничные условия таковы: на верхней полуокружности $p=1$ (рис. 1), на нижней полуокружности $p=0$. На обоих берегах разреза AC $\partial p / \partial n = 0$ (экран предполагается жестким).

При этих граничных условиях давление должно удовлетворять волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \tag{1}$$

Задача, таким образом, поставлена.

§ 3. Рассмотрим вспомогательную задачу. Пусть полуплоскость покрывается при $t=0$ источниками такой напряженности, что если бы этими источниками покрылась вся плоскость, то она излучила бы единичную волну давления. Другими словами, нормальная скорость должна быть выбрана в виде

$$v = \frac{1}{w}\sigma_0(t) = \begin{cases} 0 & (t<0), \\ \dfrac{1}{w} & (t \geqslant 1), \end{cases} \tag{2}$$

где $w=\rho_0 c$ — волновое сопротивление среды.

Картина явления показана на рис. 2. Край излучающей полуплоскости находится в A'. Полуплоскость слева от A' жестка и неподвижна. Граничные условия: $p=1$ на дуге $C'B'$; $p=0$ на дуге $B'D'$; $\partial p / \partial n = 0$ как на $D'A'$, так и на $A'C'$. Поле внутри полукруга $C'B'D'A'C'$ легко найти.

Мы имеем

$$dp = \rho_0 \frac{\dot{v}\left(t - \frac{R}{c}\right)}{2\pi R} dS, dS = 2\vartheta a\, da = 2\vartheta R\, dR$$

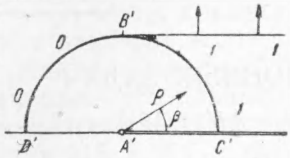

Рис. 2

(см. рис. 3). Далее,

$$\vartheta = \arc\cos \frac{\cos\beta}{\sqrt{(R/\rho)^2 - \sin^2\beta}},$$

и мы имеем, принимая во внимание (2):

$$p = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\rho/c}^{\infty} \vartheta(\tau)\, \sigma_1(t-\tau)\, d\tau = \frac{1}{\pi} \vartheta(t)\, \sigma_0\left(t - \frac{\rho}{c}\right).$$

Таким образом, внутри полукруга $\rho \leqslant ct$ давление выражается формулой

$$p = \frac{1}{\pi} \arc\cos \frac{\pm \cos\beta}{\sqrt{\left(\frac{ct}{\rho}\right)^2 - \sin^2\beta}}, \qquad (3)$$

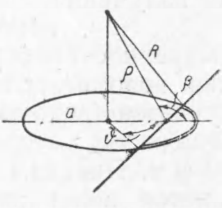

Рис. 3

что и представляет собою решение вспомогательной задачи излучения.

§ 4. Сравнивая граничные условия основной и вспомогательной задач, мы видим, что граничные условия обеих задач совпадут, если увеличить углы второй задачи вдвое. При этом рис. 2 перейдет в рис. 1. Стало быть, одна из формул преобразования полукруга в круг имеет вид

$$\alpha = 2\beta. \qquad (4)$$

Найдем формулу преобразования радиусов. Подстановкой

$$\operatorname{ch} z = \frac{ct}{r}$$

приведем волновое уравнение (1) к уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \overline{p}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \overline{p}}{\partial \alpha^2} = 0.$$

Очевидно, что мы можем, не изменив этого уравнения, умножить оба аргумента на одно и то же число. Вводя вместо α новый угол 2β, мы должны соответственно заменить z по формуле

$$z = 2y,$$

где

$$\operatorname{ch} y = \frac{ct}{\rho},$$

так что

$$\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} 2y = 2\operatorname{ch}^2 y - 1,$$

и мы получим формулу преобразования радиусов

$$\frac{ct}{r} = 2\left(\frac{ct}{\rho}\right)^2 - 1. \tag{5}$$

Формулы (4) и (5) дают инвариантное по отношению к волновому уравнению преобразование полукруга в круг.

§ 5. Остается подставить (4) и (5) в (3), чтобы получить решение нашей дифракционной задачи. Мы находим

$$p = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{\pm\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\frac{ct}{r} + \cos\alpha}}. \tag{6}$$

Формула (6) была получена раньше другим способом [1].

Поступило
7 I 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Харкевич, ЖТФ, 19, 828 (1949) (§ 1, формула 7).