Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 1

ФИЗИКА

К. В. НИКОЛЬСКИЙ

О БЕСКОНЕЧНЫХ МАТРИЦАХ, УПОТРЕБЛЯЮЩИХСЯ В ТЕОРИИ ВТОРИЧНОГО КВАНТОВАНИЯ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 6 III 1950)

Цель этой заметки — рассмотреть некоторые возможные определения несобственных математических объектов, которые могут быть полезными при формулировке квантово-механических закономерностей.

Рассмотрим алгебру, образованную матрицами конечного ранга, имеющими указываемый далее вид. Для определенности мы выберем ранг матриц равным $n=5$, пусть матрица A имеет вид

$$A=\begin{Vmatrix} \cdot & a & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & b & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & c & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & d \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{Vmatrix}, \tag{1}$$

где a, b, c, d, — некоторые числа. Вычислим ее степень, пользуясь обычным законом умножения матриц. Мы получим:

$$\begin{Vmatrix} \cdot & a & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & b & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & c & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & d \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \cdot & a & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & b & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & c & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & d \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cdot & \cdot & ab & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & bc & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & cd \\ d & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a & \cdot & \cdot & \cdot \end{Vmatrix} = A^2,$$

$$\begin{Vmatrix} \cdot & \cdot & ab & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & bc & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & cd \\ d & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a & \cdot & \cdot & \cdot \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \cdot & a & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & b & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & c & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & d \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & abc & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & bcd \\ cd & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & da & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & ab & \cdot & \cdot \end{Vmatrix} = A^3, \tag{2}$$

$$\begin{Vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & abcd \\ bcd & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & cda & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & dab & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & abc & \cdot \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \cdot & a & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & b & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & c & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & d \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} abcd & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & abcd & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & abcd & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & abcd & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & abcd \end{Vmatrix} = A^5 = abcd\cdot E,$$

где E — единичная матрица.

Пусть теперь дана матрица n-го ранга указанного типа, а именно.

$$A_n = \begin{Vmatrix} . & a_1 & . & . & . & . & 0_{1n} \\ . & . & a_2 & . & . & . & . \\ . & . & . & a_3 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & a_{n-1} \\ 1_{n1} & . & . & . & . & . & 0_{nn} \end{Vmatrix}, \quad a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1} \text{ — некоторые числа.} \tag{3}$$

Допустим, что имеют числовой смысл следующие предельные операции. Введем бесконечную матрицу Ω такую, что

$$\Omega = \lim_{n\to\infty} \begin{Vmatrix} . & a_1 & . & . & . & . \\ . & . & a_2 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & a_{n-1} \\ 1 & . & . & . & . & . \end{Vmatrix} \tag{4}$$

и затем введем предельные, несобственные образы:

$$\lim_{n\to\infty} (\Omega_n)^n = \Omega^\infty = \lim_{n\to\infty} (a_1\, a_2 \ldots a_{n-1} \ldots)\cdot E_\infty, \tag{5}$$

т. е. допустим, что производится перемножение n-строчных матриц при n, возрастающем до бесконечности. При этом $\lim\limits_{n\to\infty} a_1\, a_2 \ldots a_{n-1} \ldots$ $\ldots = \Pi(a_i)$ символ бесконечного произведения ([1]), образованного из последовательности чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \ldots$, причем предполагается сходимость этого произведения*. E_∞ — символ единичной бесконечной матрицы, т. е.

$$E_\infty = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{Vmatrix}. \tag{6}$$

Таким образом, указанные соотношения позволяют сопоставить каждому бесконечному произведению $\Pi(a_i)$ некоторую бесконечную последовательность матриц и предельную для этой бесконечной последовательности бесконечную матрицу Ω. Указанный метод сопоставления матриц бесконечным рядам и произведениям может служить для установления изоморфизмов разложений в бесконечные ряды и, соответственно, для анализа квантово-механического формализма. Частным случаям этого метода является метод вторичного квантования. Отметим, в частности, возможность определить этим путем класс матриц, которые могут быть сопоставлены показательным функциям, а именно, для этого могут быть использованы соотношения

$$\exp\left\{\lim_{n\to\infty} u_n\right\} = \lim_{n\to\infty} \{\exp u_n\}, \qquad \prod_{n=1}^{m} (1 + a_n) = \exp\left\{\sum_{n=1}^{m} \log(1 + a_n)\right\}. \tag{7}$$

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступило
23 II 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. T. Whittaker and G. N. Watson, A Course of Modern Analysis, 4 t ed., 1927, p. 32; Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон, Курс современного анализа, 1933—1934.

* Отметим, что бесконечный ряд $1 + u_1 + u_2 + \cdots = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ может быть преобразован в бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + v_n)$, где $v_n = \dfrac{u_n}{1 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n}$.