Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 1

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

М. Э. БЕРМАН

К ВОПРОСУ О ЦЕНТРЕ ИЗГИБА

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 6 III 1950)

В настоящей работе излагается новый метод определения координат центра изгиба. Этот метод отличается от существующих методов тем, что он позволяет определять координаты центра изгиба, не зная закона распределения касательных напряжений при изгибе. Мы покажем, что для определения координат центра изгиба достаточно знать лишь контурные значения продольных перемещений или контурные значения касательного напряжения, причем не при изгибе, а при кручении. Этим значительно расширяется круг задач, для которых можно будет определять координаты центра изгиба.

Пусть u, v и w — компоненты перемещения при кручении. Примем, что брус расположен горизонтально. Начало координат поместим в центре тяжести крайнего левого сечения бруса, ось x направим вдоль геометрической оси бруса, взаимно перпендикулярные оси y и z расположим в крайнем левом сечении бруса произвольно. Примем также, что закрепление осуществлено в окрестности центра тяжести крайнего левого сечения бруса. При этих условиях, полагая, согласно Сен-Венану,

$$X_x = Y_y = Z_z = Y_z = 0,$$

имеем

$$v = -\varphi_0 xz, \quad w = \varphi_0 xy, \tag{1}$$

где φ_0 — относительный угол закручивания. Компонент перемещения u удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{2}$$

и условию на контуре

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi_0 [z \cos(\nu, y) - y \cos(\nu, z)], \tag{3}$$

где ν — внешняя нормаль к контуру.

В задаче об изгибе, при аналогичных условиях закрепления, полагая, что оси y, z — главные центральные оси, принимая, согласно Сен-Венану, что

$$x_x = -\frac{P_z(l-x)z}{I_y} - \frac{P_y(l-x)y}{I_z}, \quad Y_y = Z_z = Y_z = 0,$$

для компонентов перемещения получаем:

$$v=\frac{P_y(l-x)^3}{6EI_z}+\frac{\mu P_y(l-x)y^2}{2EI_z}+\frac{\mu P_z(l-x)yz}{EI_y}-$$
$$-\frac{\mu P_y(l-x)z^2}{2EI_z}+\frac{P_yl^2x}{2EI_z}-\frac{P_yl^3}{6EI_z},$$
$$w=\frac{P_z(l-x)^3}{6EI_y}-\frac{\mu P_z(l-x)y^2}{2EI_y}+\frac{\mu P_y(l-x)yz}{EI_z}+\frac{\mu P_z(l-x)z^2}{2EI_y}+ \tag{4}$$
$$+\frac{P_zl^2x}{2EI_y}-\frac{P_zl^3}{6EI_y}.$$

В этих выражениях слагаемые, соответствующие, согласно критерию Сен-Венана, кручению, отброшены. Компонент перемещения u удовлетворяет уравнению вида

$$\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=-\frac{2}{E}\left(\frac{P_yy}{I_z}+\frac{P_zz}{I_y}\right) \tag{5}$$

и условию на контуре

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos(\nu, y)+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos(\nu, z)=0. \tag{6}$$

Чтобы привести задачу об изгибе к проблеме Неймана, полагаем

$$u=\frac{P_z(l-x)^2z}{2EI_y}+\frac{P_y(l-x)^2y}{2EI_z}-\frac{P_yy^3}{3EI_z}-\frac{P_zz^3}{3EI_y}+\psi(y, z), \tag{7}$$

где $\psi(y, z)$ — функция, гармоническая всюду внутри области, ограниченной контуром сечения. Контурное условие для функции $\psi(y, z)$ после некоторых упрощений принимает вид:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\nu}=\left[\left(1+\frac{\mu}{2}\right)\frac{P_yy^2}{EI_z}+\mu\frac{P_zyz}{EI_y}-\frac{\mu}{2}\frac{P_yz^2}{EI_z}-\frac{P_yl^2}{2EI_z}\right]\cos(\nu, y)+$$
$$+\left[\left(1+\frac{\mu}{2}\right)\frac{P_zz^2}{EI_y}+\mu\frac{P_yyz}{EI_z}-\frac{\mu}{2}\frac{P_zy^2}{EI_y}-\frac{P_zl^2}{2EI_y}\right]\cos(\nu, z). \tag{8}$$

Определение координат центра изгиба. Условие равновесия $\Sigma m_x=0$ для отсеченной части бруса имеет вид

$$\int_F(Y_xz-Z_xy)\,dF-P_y\bar{z}+P_z\bar{y}=0, \tag{9}$$

где $\bar{y}$ и $\bar{z}$ — координаты центра изгиба. Заменяя Y_x и Z_x их выражениями через перемещения и учитывая (4) и (7), получаем

$$G\int_F\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}z-\frac{\partial\psi}{\partial z}y\right)dF+G\int_F\left[\frac{\mu}{2}\frac{P_yz^2}{EI_z}-\frac{\mu}{2}\frac{P_zy^3}{EI_y}-\right.$$
$$\left.-\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\frac{P_zz^2y}{EI_y}-\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\frac{P_yy^2z}{EI_z}\right]dF-P_y\bar{z}+P_z\bar{y}=0. \tag{10}$$

Применяя формулу Римана, находим

$$\int_F \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} z - \frac{\partial\psi}{\partial z} y\right) dF = \oint \psi \left[z \cos(\nu, y) - y \cos(\nu, z)\right] ds,$$

причем, на основании (3),

$$z \cos(\nu, y) - y \cos(\nu, z) = \frac{\partial u_k}{\partial \nu},$$

где u_k — функция u при кручении, отнесенная к φ_0. Следовательно,

$$\int_F \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} z - \frac{\partial\psi}{\partial z} y\right) dF = \oint \psi \frac{\partial u_k}{\partial \nu} ds.$$

Учитывая, что ψ и u_k — функции, гармонические всюду внутри области, ограниченной контуром поперечного сечения бруса, на основании формулы Грина получаем

$$\oint \psi \frac{\partial u_k}{\partial \nu} ds = \oint u_k \frac{\partial \psi}{\partial \nu} ds.$$

Подставляя в (10), находим

$$G \oint u_k \frac{\partial\psi}{\partial\nu} ds + G \int_F \left[\frac{\mu}{2} \frac{P_y z^2}{EI_z} - \frac{\mu}{2} \frac{P_z y^3}{EI_y} + \right.$$
$$\left. + \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \frac{P_z z^2 y}{EI_y} - \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \frac{P_y y^2 z}{EI_z}\right] dF - P_y \bar{z} + P_z \bar{y} = 0.$$

В этом выражении заменим $\partial\psi / \partial\nu$ на основании (8); после ряда упрощений получим:

$$\frac{P_y}{I_x} \left\{\oint u_k \left[y^2 \cos(\nu, y) + 2\mu yz \cos(\nu, z)\right] ds - (1 - 2\mu) \int_F y^2 z \, dF - 2(1 + \mu) I_z \bar{z}\right\} +$$
$$+ \frac{P_z}{I_y} \left\{\oint u_k \left[z^2 \cos(\nu, z) + 2\mu yz \cos(\nu, y)\right] ds + \right.$$
$$\left. + (1 - 2\mu) \int_F yz^2 dF + 2(1 + \mu) I_y \bar{y}\right\} = 0,$$

откуда

$$2(1 + \mu) I_y \bar{y} = - \oint u_k \left[z^2 \cos(\nu, z) + 2\mu yz \cos(\nu, y)\right] ds - (1 - 2\mu) \int_F yz^2 dF,$$
$$(11)$$
$$2(1 + \mu) I_z \bar{z} = \oint u_k \left[y^2 \cos(\nu, y) + 2\mu yz \cos(\nu, z)\right] ds - (1 - 2\mu) \int_F y^2 z \, dF.$$

Формулы (11) определяют в наиболее общем виде связь между координатами центра изгиба и геометрическими размерами сечения. Мы видим, что для определения координат центра изгиба нет надобности знать распределение касательных напряжений при изгибе, достаточно знать лишь контурные значения функции u_k. Без доказательства приводим формулу, которая весьма полезна во многих случаях, особенно, когда задача о кручении решена приближенно в компонентах напряжения, а также при экспериментальном определении функции u_k с помощью аналогии Прандтля

$$u_k = -\frac{1}{G\varphi_0}\int_0^s \tau_s ds - \int_0^s \rho_\nu ds, \tag{12}$$

где τ_s — равнодействующее касательное напряжение в точках контура, ρ_ν — проекция радиуса-вектора точки контура на нормаль.

Формулам (11) можно придать также следующий вид

$$\begin{aligned} I_y\bar{y} &= -\int_F u_k z\,dF + \frac{\mu}{1+\mu}\int_F \varphi_k y\,dF, \\ I_z\bar{z} &= \int_F u_k y\,dF + \frac{\mu}{1+\mu}\int_F \varphi_k z\,dF, \end{aligned} \tag{13}$$

где φ_k — функция напряжений при кручении, отнесенная к $G\varphi_0$.

Заметим, что если в качестве критерия отсутствия кручения принять критерий Треффтца, то для определения координат центра изгиба получаются формулы

$$I_y\bar{y} = -\int_F u_k z\,dF, \quad I_z\bar{z} = \int_F u_k y\,dF. \tag{14}$$

На доказательстве этих формул мы здесь не останавливаемся.

Сопоставляя (13) и (14), мы приходим к выводу, что высказывания некоторых авторов, что критерии Сен-Венана и Треффтца не приводят к сколько-нибудь существенным расхождениям в значениях координат центра изгиба, не обоснованы.

Поступило
9 II 1950