Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 1

ГИДРОМЕХАНИКА

Е. А. КРАСИЛЬЩИКОВА

К ТЕОРИИ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 7 III 1950)

I. Рассмотрим бесконечную прямую, вдоль которой в каждой точке справо налево со скоростью u один за другим начинают функционировать источники с переменной интенсивностью $q = f_0(t-t_1) f_1(t)$. Закон изменения функции f_0 для всех источников один и тот же, если считать начальным моментом для каждого источника момент его возникновения. Функция f_1 в каждый момент времени для всех источников имеет одно и то же значение*.

Пусть в точке N возник источник в момент t_1 (рис. 1).

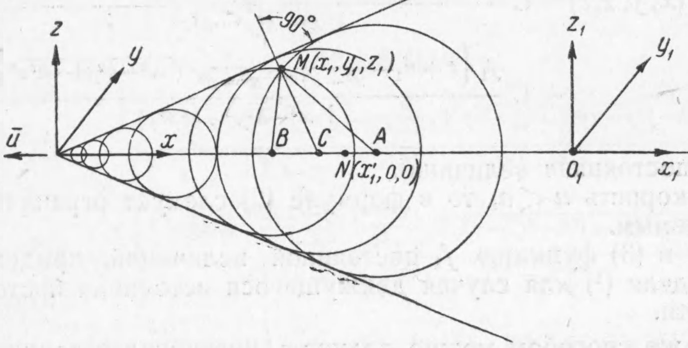

Рис. 1

Потенциал скорости в точке M, доставляемый такой системой источников, представляется в неподвижных осях координат в виде

$$\varphi_1^*(x_1, y_1, z_1, t) = B \int_{t_1'}^{t_1''} \frac{f_0\left[t - t_1 - \frac{r}{a}\right] f_1\left[t - \frac{r}{a}\right]}{r}\, dt_1 \quad \left(r = \sqrt{(x_1 + ut_1)^2 + y_1^2 + z_1^2}\right), \tag{1}$$

где B — постоянная величина, имеющая размерность скорости, и a — скорость звука. Пределы интегрирования t_1' и t_1'' учитывают те источники, влияние которых сказывается в точке M в момент t. Начало координат O_1 помещено в той точке пространства, в которой возник источник в момент времени $t = 0$.

Вводя переменную интегрирования $\tau = a(t - t_1) - r$ и переходя к осям координат, перемещающимся прямолинейно поступательно со скоростью u, преобразуем (1) к виду

* Аналогичную задачу рассматривал Прандтль ([1]), считая $q = f_0(t - t_1)$.

$$\varphi_1^*(x, y, z, t) = \frac{B}{a}\int_0^{\tau_1}\frac{f_0\left(\frac{\tau}{a}\right) f_1\left\{t - \frac{u[x-(u/a)\tau]}{u^2-a^2} \mp \frac{a}{u^2-a^2}\sqrt{[x-(u/a)\tau]^2 - k^2(y^2+z^2)}\right\} d\tau}{\sqrt{[x-(u/a)\tau]^2 - k^2(y^2+z^2)}}, \tag{2}$$

где $k = \sqrt{(u/a)^2 - 1}$.

Предполагая $u > a$, потенциал скорости в точке $M(x, y, z)$ представится как сумма выражений (2) со знаком минус перед радикалом, учитывающим влияние на точку M источников отрезка AB, и со знаком плюс, учитывающим источники отрезка CB. В качестве верхнего предела интегрирования τ_1 следует взять меньший корень выражения, стоящего под знаком радикала. Легко видеть, что в этом случае оба корня являются действительными положительными количествами (рис. 1).

Построим потенциал скорости в точке M от источника, движущегося со скоростью u и с изменяющейся во времени интенсивностью по закону $f_1(t)$. Помещая источник в начале координат, потенциал найдем из выражения (2), если считать в последнем интервал интегрирования $0\tau_1$ исчезающе малым. Тогда, пренебрегая членом $(u/a)\tau$ и полагая $\frac{B}{a}\int_0^{\tau_1} f_0\left(\frac{\tau}{a}\right) d\tau = C$, где C — постоянная величина, получим

$$\varphi^*(x, y, z, t) = C\frac{f_1\left\{t + \alpha_1 - \frac{ux}{u^2-a^2} - \frac{a}{u^2-a^2}\sqrt{x^2-k^2y^2-k^2z^2}\right\}}{\sqrt{x^2-k^2y^2-k^2z^2}} + C\frac{f_1\left\{t + \alpha_1 - \frac{ux}{u^2-a^2} + \frac{a}{u^2-a^2}\sqrt{x^2-k^2y^2-k^2z^2}\right\}}{\sqrt{x^2-k^2y^2-k^2z^2}}, \tag{3}$$

(где α_1 — постоянная величина).

Если скорость $u < a$, то в формуле (2) следует ограничиться первым слагаемым.

Считая в (3) функцию f_1 постоянной величиной, придем к решению Прандтля ([1]) для случая движущегося источника постоянной интенсивности.

Таким же способом можно получить потенциал источника с переменной интенсивностью, движущегося по любому закону

$$X = F_1(t), \qquad Y = F_2(t), \qquad Z = F_3(t).$$

Например, для случая прямолинейного движения источника потенциал скорости представится выражением:

$$\varphi^{**}(x, y, z, t) = \frac{Cf_1(t_1 + \alpha_1)}{\sqrt{[x + F_1(t) - F_1(t_1)]^2 + y^2 + z^2} - [x + F_1(t) - F_1(t_1)]F_1'(t_1)} + \text{аналогичный член с параметром } t_1^*, \tag{4}$$

где параметры $t_1 = t_1(x, y, z, t)$ и $t_1^* = t_1^*(x, y, z, t)$ являются действительными корнями уравнения

$$a(t - t_1) - \sqrt{[x + F_1(t) - F_1(t_1)]^2 + y^2 + z^2} = 0. \tag{5}$$

Если источник движется с постоянным ускорением по закону

$$X = F_1(t) = -\left[ut + \frac{bt^2}{2}\right]$$

(где b — постоянная величина), то уравнение (5) относительно параметра t_1 (соответственно t_1^*) является алгебраическим уравнением четвертой степени.

II. Решения вида (3) волнового уравнения в подвижных осях координат

$$(a^2 - u^2)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - 2u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\, \partial x} = 0 \tag{6}$$

используем для краевой задачи.

Рассмотрим тонкое слабо изогнутое крыло, мало наклоненное к оси x. Будем предполагать, что на основное движение крыла, состоящее в прямолинейном поступательном движении со скоростью $u > a$, наложены малые добавочные движения, в которых крыло может деформироваться [2].

Пусть на проекции крыла на плоскость xy нормальная составляющая скорости, обусловленная добавочными движениями, задана по закону

$$\mathfrak{v}_n = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = A(x, y) f\{t + \alpha(x, y)\}. \tag{7}$$

Поместим во всех точках плоскости xy источники с потенциалами φ^*. При этом в формуле (3) будем считать C и α_1 функциями точек названной плоскости и заменим α_1 на α и f_1 на f. Вследствие линейного волнового уравнения его решением будет являться также выражение

$$\varphi(x, y, z, t) =$$

$$= \iint\limits_{S(x,y,z)} C(\xi, \eta) \frac{f\left\{t + \alpha(\xi,\eta) - \frac{u(x-\xi)}{u^2-a^2} - \frac{a}{u^2-a^2}\sqrt{(x-\xi)^2 - k^2(y-\eta)^2 - k^2 z^2}\right\}}{\sqrt{(x-\xi)^2 - k^2(y-\eta)^2 - k^2 z^2}}\, d\eta\, d\xi +$$

$$+ \iint\limits_{S(x,y,z)} C(\xi, \eta) \frac{f\left\{t + \alpha(\xi,\eta) - \frac{u(x-\xi)}{u^2-a^2} + \frac{a}{u^2-a^2}\sqrt{(x-\xi)^2 - k^2(y-\eta)^2 - k^2 z^2}\right\}}{\sqrt{(x-\xi)^2 - k^2(y-\eta)^2 - k^2 z^2}}\, d\eta\, d\xi. \tag{8}$$

Область интегрирования S — это часть плоскости xy, которая лежит внутри характеристического конуса с вершиной в точке с координатами x, y и z (рис. 2).

Решение (8) будет отвечать потенциалу скорости, происходящему от добавочных движений крыла, если функцию $C(x, y)$ определить из краевых условий на плоскости $z = 0$.

Вводя в (8) вместо η новую переменную интегрирования ϑ:

$$\eta = y - \frac{1}{k}\sqrt{(x-\xi)^2 - k^2 z^2}\cos\vartheta \tag{9}$$

и дифференцируя полученное выражение по параметру z, найдем зависимость, связывающую функцию $C(x, y)$ с нормальной производной потенциала скорости $\partial\varphi/\partial z$ в любой точке плоскости $z = 0$:

$$C(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\{f[t + \alpha(x, y)]\}^{-1}\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right\}_{z=0}. \tag{10}$$

Сопоставляя (10) с условием (7), заключаем, что на крыле

$$C(x, y) = -(1/2\pi) A(x, y). \tag{11}$$

Таким образом, потенциал скорости может быть вычислен по формуле (8) во всякой точке пространства, для которой область интегрирования S не выходит за пределы поверхности крыла, где функция C задана.

Решение плоской задачи получим, полагая в (8) координату $y=0$, функции $C=C(x)$ и $\alpha=\alpha(x)$ и считая переменные интегрирования в области S изменяющимся в пределах $0 \leqslant \xi \leqslant x-kz$;

$$-\frac{1}{k}\sqrt{(x-\xi)^2-k^2z^2} \leqslant \eta \leqslant \frac{1}{k}\sqrt{(x-\xi)^2-k^2z^2}.$$

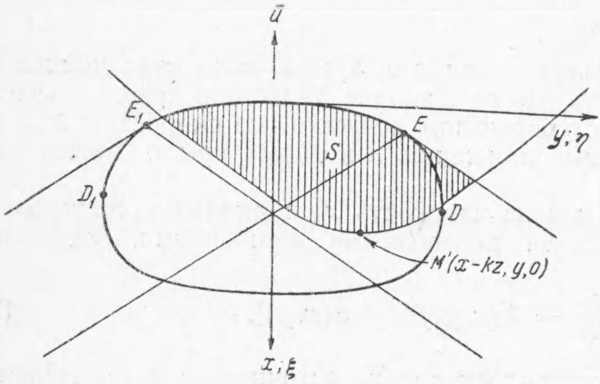

Рис. 2

В точках плоскости xy, лежащих вне крыла и вне области влияния вихревой системы за крылом, где потенциал скорости φ равен нулю, функция C удовлетворяет интегральному уравнению

$$\int\limits_{x_E}^{x'}\int\limits_{\psi(\xi')}^{y'} C(\xi',\eta')K\times \times(x',y';\ \xi',\eta')\,d\eta'\,d\xi' = = F(x',y'), \qquad (12)$$

где ядро определено в виде

$$K(x',y';\xi',\eta') = \frac{1}{\sqrt{(x'-\xi')(y'-\eta')}}\left[f\left\{t+\alpha\left(\frac{\xi'+\eta'}{2},\frac{\eta'-\xi'}{2}\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{u[(y'-\eta')+(x'-\xi')]}{2(u^2-a^2)}-\frac{a}{u^2-a^2}\sqrt{(x'-\xi')(y'-\eta')}\right\}\right]+$$

$+$ аналогичный член со знаком плюс перед радикалом (13)

и известная функция в виде

$$F(x',y') = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{s(x',y')} A\left(\frac{\xi'+\eta'}{2},\frac{\eta'-\xi'}{2}\right)K(x',y';\xi',\eta')\,d\eta'\,d\xi'. \qquad (14)$$

Область s — часть крыла, лежащая внутри характеристического конуса, вершина которого находится в точке с координатами $x', y', 0$. $y'=\psi(x')$ — уравнение концевой кромки ED крыла (рис. 2).

Координаты x', y' и z' связаны с x, y и z преобразованием

$$x'=x-ky, \quad y'=x+ky, \quad z'=kz. \qquad (15)$$

Если задать условие (7) в виде

$$\mathfrak{v}_n = \operatorname{Re} A_2(x,y)\exp(i\omega t) = \operatorname{Re} A(x,y)\exp(i[\omega t+\alpha_2(x,y)]),$$

то уравнение (12) сводится к найденному нами ранее интегральному уравнению для случая гармонических колебаний крыла и решенному в степенных рядах ([3]).

Поступило
27 I 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Prandtl, Luftfahrtforschung, 13, No. 10 (1936). [2] Л. И. Седов, Теория плоских движений идеальной жидкости, 1939. [3] Е. А. Красильщикова, ДАН, 58, № 5 (1947).