Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 1

*МЕХАНИКА*

Н. Н. БАУТИН

# ТЕОРИЯ СПУСКОВОГО РЕГУЛЯТОРА С ПРУЖИНЯЩЕЙ ПЛАСТИНКОЙ

*(Представлено академиком А. А. Андроновым 3 III 1950)*

1. В приборах, измеряющих малые промежутки времени (хронографы, электроотметчики), а также в некоторых других случаях в качестве регулятора применяют упругую пружинящую пластинку, взаимодействующую с ходовым колесом (рис. 1)*.

В настоящей заметке дается теория такого регулятора на модели, учитывающей две степени свободы **, и находятся величины, характеризующие периодическое движение (координаты и скорости послеимпульсных состояний) и его устойчивость, а также зависимость периода от параметров регулятора. Полученные формулы могут служить для расчета регуляторов с пружинящей пластинкой, а также позволяют исследовать динамику регулятора. В частности, в заметке показано, что для рассматриваемой модели при фиксированных значениях параметров возможны различные устойчивые периодические режимы***.

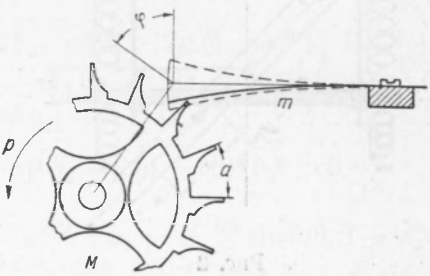

Рис. 1

2. Описание динамической модели. Пусть ходовое колесо осуществлено в виде бесконечной ленты, оснащенной зубцами, расположенными на равных расстояниях $a$, и приводимой в движение постоянным моментом, а пружинящая пластинка представлена балансиром, двигающимся поступательно по направляющим под углом $\varphi$ к направлению движения ленты ходового колеса и связанным с положением равновесия пружиной (рис. 2). Будем считать, что в промежутках между ударами ходовое колесо имеет один выдвинутый

* Рисунок изображает положение ходового колеса и пружинящей пластинки в процессе работы регулятора (в момент соударения ходового колеса с пластинкой).

** Теория регулятора с пружинящей пластинкой, предложенная Дроздовым ([1]), неудовлетворительна, так как исходит из неправильных предпосылок о характере взаимодействия ходового колеса и пластинки.

*** От ранее рассмотренной задачи о часах Галилея — Гюйгенса ([2]) рассматриваемая здесь модель в динамическом отношении отличается такими особенностями: 1) передача импульса происходит только один раз за период, 2) наличие собственного периода является здесь обязательным, 3) передача импульса происходит при соударениях под определенным углом.

зубец и этот зубец после удара мгновенно убирается (при помощи механизма, который нет надобности рассматривать), а вместо него появляется зубец, следующий за ним по порядку. Движение зубцов ходового колеса и движение балансира будем считать прямолинейным и введем координаты $x$ и $y$, расположив ось $x$ по направлению движения балансира, а ось $y$ — по направлению движения зубцов ходового колеса (направления осей $x$ и $y$ образуют угол $\varphi$). Общее начало отсчета пусть совпадает с положением равновесия балансира.

Уравнения движения для промежутков времени между ударами будут:

$$M\frac{d\dot{y}}{dt} = P, \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad m\frac{d\dot{x}}{dt} = -\varkappa_0 x - b\dot{x}, \quad \frac{dx}{dt} = \dot{x}\ *. \tag{1}$$

Будем удары считать мгновенными; тогда доударные скорости $\dot{\bar{x}}$, $\dot{\bar{y}}$ будут связаны с послеударными скоростями $\dot{x}$, $\dot{y}$ соотношениями:

$$\dot{x} = \alpha\dot{\bar{x}} + \sigma(1-\alpha)\dot{\bar{y}}, \quad \dot{y} = \beta\dot{\bar{x}} + (1-\sigma\beta)\dot{\bar{y}}, \tag{2}$$

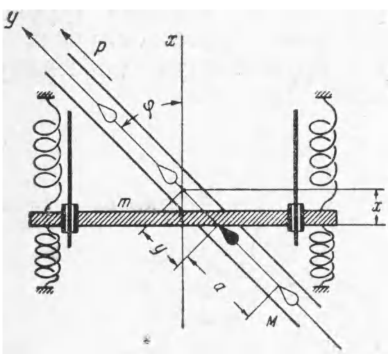


Рис. 2

где $\sigma = \cos\varphi$, $\beta = m\sigma(1+k)/M + m\sigma^2$, $\alpha = \sigma\beta - k$ и $k$ — коэффициент восстановления **.

3. Точечное преобразование. Уравнения (1) и (2) позволяют написать точечное преобразование $\Omega$ для переходов между последовательными послеударными состояниями $\{x_0, y_0(\equiv x_0/\sigma), \dot{x}_0, \dot{y}_0\}$ и $\{x_1, y_1 (\equiv x_1/\sigma), \dot{x}_1, \dot{y}_1\}$, порождаемыми последовательными ударами зубцов ходового колеса о балансир. Положим: $\varkappa_0/m = \varkappa$, $b/2m = h$, $\sqrt{\varkappa^2 - h^2} = \omega$, $x/a = \xi$, $\dot{x}/a\omega = \dot{\xi}$, $\dot{y}/a\omega = \dot{\eta}$, $h/\omega = H$, $P/2aM\omega^2 = p$, $\omega t = \tau$. Точечное преобразование $\Omega$ примет тогда вид

$$\begin{gathered}
\dot{\xi}_1 = \alpha e^{-H\tau}[\dot{\xi}_0(\cos\tau - H\sin\tau) - \xi_0(1+H^2)\sin\tau] + \sigma(1-\alpha)(2p\tau + \dot{\eta}_0),\\
\dot{\eta}_1 = \beta e^{-H\tau}[\dot{\xi}_0(\cos\tau - H\sin\tau) - \xi_0(1+H^2)\sin\tau] + (1-\sigma\beta)(2p\tau + \dot{\eta}_0),\\
\xi_1 = e^{-H\tau}[\dot{\xi}_0\sin\tau + \xi_0(\cos\tau + H\sin\tau)],
\end{gathered} \tag{3}$$

где $\tau$ — наименьший положительный корень уравнения

$$e^{-H\tau}[\dot{\xi}_0\sin\tau + \xi_0(\cos\tau + H\sin\tau)] - (p\tau^2 - 1)\sigma - \dot{\eta}_0\tau - \xi_0 = 0.$$

Преобразование (3) содержит пять существенных параметров: $\alpha$, $\beta$, $p$, $H$, $\sigma$.

---

* Фазовая переменная $\dot{x}$ динамической модели есть линейная скорость „конца“ пружинящей пластинки (пренебрегая изменениями скорости пластинки в точке удара, происходящими от смещения точки удара по длине пластинки из-за несовпадения траекторий конца зуба ходового колеса и конца пластинки); $\dot{y}$ — линейная скорость конца зуба ходового колеса; $M$ — приведенная к координате $y$ масса ходового колеса; $P$ — обобщенная сила, приводящая ходовое колесо во вращение; $m$ — приведенная к координате $x$ масса упругой пластинки (балансира); $b$ — коэффициент вязкого трения; $\varkappa_0$ — коэффициент упругости плистинки.

** Угол между направлениями скоростей зуба и пластинки в точке удара в процессе работы регулятора не остается неизменным. В динамической модели этот угол принимается постоянным, равным установочному углу $\varphi$ (рис. 1).

4. Периодическое решение. Для неподвижной точки точечного преобразования (3), определяемой условием $\dot{\xi}_1 = \dot{\xi}_0$, $\dot{\eta}_1 = \dot{\eta}_0$, $\xi_1 = \xi_0$ и соответствующей периодическому решению системы (1), (2), имеем *:

$$\dot{\xi}_0 = \frac{\sigma}{\theta} + \frac{\sigma\beta - 2\alpha}{\beta} p\theta, \quad \dot{\eta}_0 = \frac{1}{\theta} - p\theta, \quad \xi_0 = \frac{p(1-\alpha)}{\beta} \frac{\theta \sin\theta}{\operatorname{ch} H\theta - \cos\theta}, \tag{4}$$

где $\theta$ — положительный корень уравнения

$$p\theta^2 \left[ 2\alpha - \sigma\beta + (1-\alpha) \frac{e^{H\theta} - H\sin\theta - \cos\theta}{\operatorname{ch} H\theta - \cos\theta} \right] = \sigma\beta. \tag{5}$$

Точечное преобразование (3) будет иметь столько неподвижных точек, сколько положительных корней имеет уравнение (5).

Неподвижная точка и соответствующее периодическое решение будут устойчивы (т. е. все три корня соответствующего уравнения в конечных разностях будут по модулю меньше единицы), если выполняются условия:

$$A \equiv \sigma\beta(2\alpha - \sigma\beta)\frac{1}{g} + \sigma\beta(1-\alpha)[2(1+\bar{a}_1) + g\theta\Phi_1] > 0,$$

$$\begin{aligned} B \equiv {} & [\alpha^2 + (\alpha - \sigma\beta)^2](a_1 + b_1) + 2[1 + (1-\sigma\beta)^2] - 2g(1-\alpha)^2(1+\bar{a}_1) + \\ & + [2(1-\alpha)^2 - (1-\sigma\beta)^2 - 1](1+\bar{a}_1) + \sigma\beta(1-\alpha)[2\bar{a}_0 + g\theta\Phi_2] > 0, \end{aligned} \tag{6}$$

$$C \equiv 4[1 + (\alpha - \sigma\beta)^2 b_1] - B > 0,$$

$$D \equiv 2 - \frac{A+B}{2} + \frac{B-A}{2}(\alpha - \sigma\beta)^2 b_1 - 2(\alpha - \sigma\beta)^4 b_1^2 > 0,$$

где $1/g = e^{-2H\theta} - 2e^{-H\theta}\cos\theta + 1$, $b_1 = e^{-2H\theta}$, $\bar{a}_0 = e^{-H\theta}\sin\theta/\theta$, $1 + \bar{a}_1 = 1 - e^{-H\theta}(\cos\theta + H\sin\theta)$, $a_1 + b_1 = e^{-2H\theta} + e^{-H\theta}(\cos\theta - H\sin\theta)$,
$\Phi_1 = e^{-H\theta}[4He^{-H\theta} - (1-H^2)(1-e^{-2H\theta})\sin\theta - 2H(1+e^{-2H\theta})\cos\theta]$,
$\Phi_2 = e^{-H\theta}[(1-H^2)(1+e^{-2H\theta})\sin\theta + 2H(1-e^{-2H\theta})\cos\theta]$.

5. Уравнение (5) связывает период $\theta$ (безразмерное время между двумя последовательными ударами зуба ходового колеса о пластинку) с безразмерными параметрами $H$, $p$, $J$, $\sigma$, $k$**, характеризующими соответственно: трение в системе, вращающий момент, отношение моментов инерции, установочный угол и коэффициент восстановления при ударе. Уравнения (4) и (5) совместно с условиями устойчивости (6) позволяют исследовать возможные режимы работы регулятора и зависимость этих режимов от параметров.

Выводы. 1°. При отсутствии трения в системе (при $H = 0$) и фиксированных значениях остальных параметров существует единственная неподвижная точка преобразования (3), которая может быть устойчивой или неустойчивой.

2°. При $H = 0$ взаимодействие ходового колеса и пластинки в устойчивом режиме происходит на встречных ударах.

---

* В работе не затрагивается вопрос о возможности других рекуррентных режимов (например режимов, соответствующих так называемым периодическим точкам преобразования).

** Параметры $k$ и $J = m/M$ входят в уравнение через $\alpha$ и $\beta$.

3°. При $H=0$ внутри каждого интервала значений параметра $\theta$, соответствующего неустойчивым режимам, содержится либо период собственных колебаний пластинки ($\theta=2\pi$), либо его целые кратности ($\theta=2n\pi$, $n=2, 3, \ldots$).

Наличие трения ($H>0$) существенно влияет на поведение системы.

4°. При фиксированном $H>0$ и фиксированном $k$ $(0<k<1)$ можно так выбирать фиксированные $J$, $\sigma$ и $p$, что преобразование (3) будет иметь более одной устойчивой неподвижной точки.

Режим, в котором будет работать регулятор при наличии нескольких устойчивых периодических решений, будет зависеть от начальных условий. При случайном изменении начальных условий (например при точке или сотрясении) регулятор может перескакивать с одного режима на другой.

5°. При $H>0$ взаимодействие ходового колеса и пластинки в устойчивом режиме может происходить либо на встречных, либо на подталкивающих ударах.

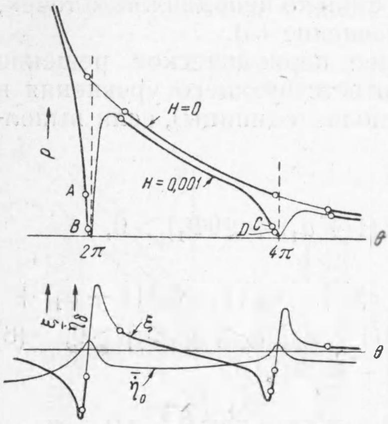


Рис. 3

6°. Для фиксированного $H>0$ условие $\cos\theta - H\sin\theta - e^{-H\theta}>0$ выделяет интервалы значений $\theta$ (содержащие либо период собственных колебаний пластинки, либо его целые кратности), внутри которых при выполнении условий (6) система может работать в режиме подталкивающих ударов.

7°. При $H=0$ моменты на ходовом колесе, вычисленные по уравнению (5), обратно пропорциональны квадратам периодов. При $H>0$ уклонение от этого закона будет тем сильнее, чем ближе период автоколебаний к периоду собственных колебаний пластинки или к его целой кратности.

6. На рис. 3 сверху приведены кривые зависимости периода от вращающего момента, построенные для фиксированных значений параметров ($J={}^{1}/_{75}$, $\varphi=45°$, $k=0{,}5$, $H=0$ и $H=0{,}001$) по уравнению (5). Жирными линиями выделены области устойчивости. Снизу для $H=0{,}001$ в том же масштабе по оси $\theta$ построены кривые зависимости от периода $\theta$ доударной скорости пластинки ($\dot{\bar{\eta}}$) и места удара ($\xi$). Участки $AB$ и $CD$ на устойчивой части кривой ($p$, $\theta$) соответствуют подталкивающим ударам ($\dot{\bar{\eta}}>0$). Чертеж иллюстрирует выводы. Из характера кривой ($p$, $\theta$) видно также, что, увеличивая $p$, можно перейти в такую область значений параметров, где существует только одно устойчивое периодическое движение.

7. Наличие нескольких устойчивых режимов можно наблюдать экспериментально на простых моделях при соответствующем выборе величины вращающего момента. Пересколи с одного режима на другой вызываются, например, затормаживанием или подталкиванием ходового колеса рукой. Легко удается наблюдать до четырех различных устойчивых режимов.

Физико-технический институт
Горьковского государственного университета

Поступило
15 II 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. В. Дроздов, Детали приборов, 1948. [2] Н. Н. Баутин, ДАН, 65, № 3 (1949).