Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 1

МАТЕМАТИКА

А. М. РОДНЯНСКИЙ

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ОБЛАСТЕЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 17 II 1950)

В этой заметке G есть область в $R^n (n \geqslant 2)$; $f_1, \ldots, f_n$ — функции, определенные и дифференцируемые (см. ([2])) в G; f — отображение G в R^n, осуществляемое функциями $f_1, \ldots, f_n$; J — якобиан отображения f. Далее полагаем:

$$G^+ = \underset{x}{E}\{x \in G, J(x) > 0\}, \quad G^- = \underset{x}{E}\{x \in G, J(x) < 0\},$$
$$G^0 = \underset{x}{E}\{x \in G, J(x) = 0\}.$$

Пусть $E \subseteq R^n$. Через $(E)_i$ обозначим множество внутренних точек множества E. Далее полагаем:

$$E_g = (E)_g = \overline{E} - (E)_i.$$

Множество E_g называется границей множества E. Через $\operatorname{mes} E$ обозначим меру множества E.

1°. Если G^+ непусто, G^- непусто, то и G^0 непусто.

2°. Если G^0 пусто, то для всякой точки $a \in G$ существуют связные окрестности $U = U(a)$, $V = V(f(a))$ такие, что f отображает U топологически на V.

3°. Если $a \in G$, $J(a) \neq 0$, то существует сколь угодно малая связная окрестность $U = U(a)$ такая, что fU есть область.

4°. $G = G^0$ тогда и только тогда, когда функции $f_1, \ldots, f_n$ зависимы в G (см. ([2])).

Замечание 1. Утверждение 1 представляет собой перенесение на якобиан известного свойства Дарбу производной. Утверждения 2°, 3°, 4° были ранее известны в предположении непрерывной дифференцируемости функций $f_1, \ldots, f_n$ (см. ([2])).

5°. $\operatorname{mes} fG^0 = 0$. Если G^+ непусто, то $\operatorname{mes} G^+ > 0$, $\operatorname{mes} fG^+ > 0$. Если G^- непусто, то $\operatorname{mes} G^- > 0$, $\operatorname{mes} fG^- > 0$. Если $\operatorname{mes} fG > 0$, то $(fG)_i$ непусто.

В утверждениях 6°—13° область G предполагаем ограниченной, а отображение f, сверх того, что про него сказано в начале заметки, предполагаем непрерывным в $\overline{G}$.

Определение 1. Скажем, что для отображения f имеет место принцип максимума, если $(fG)_g \subseteq fG_g$.

6°. Если для отображения f имеет место принцип максимума, то существуют точки:

$$x_0 \in G_g, \quad x_{i1} \in G_g, \quad x_{i2} \in G_g \quad (i = 1, \ldots, n)$$

такие, что

$$|f(x_0)| = \sup_{x \in \overline{G}} |f(x)|, \quad f_i(x_{i1}) = \sup_{x \in \overline{G}} f_i(x), \quad f_i(x_{i2}) = \inf_{x \in \overline{G}} f_i(x).$$

При этом для всякой точки $a \in R^n - fG$ существует точка $\xi \in G_g$ такая, что:

$$|f(\xi) - a| = \inf_{x \in \overline{G}} |f(x) - a|.$$

7°. $\operatorname{mes}[(fG)_g - fG_g] = 0, \quad f^{-1}[(fG)_g - fG_g] \subseteq G^0$.

В утверждениях 8°—13° предполагаем, что $J(x) \geqslant 0$ (соответственно $J(x) \leqslant 0$) для всех $x \in G$.

8°. Полный прообраз множества $(fG)_g - fG_g$ при отображении f есть открытое множество, содержащееся в G^0.

9°. Если G^0 не содержит внутренних точек, то для отображения f имеет место принцип максимума.

10°. Если отображение f таково, что $J(x) = 0$ только в тех точках, в которых все частные производные всех функций $f_1, \ldots, f_n$ равны нулю, то для отображения f имеет место принцип максимума.

Замечание 2. Утверждение 10° содержит, как частный случай, все результаты работы ([1]).

11°. Пусть O есть некоторая компонента множества $R^n - fG_g$. Тогда либо $O \subseteq fG$, либо $\operatorname{mes}[O \cap fG] = 0$, причем в последнем случае $O \cap fG \subseteq (fG)_g - fG_g$, а полный прообраз области O при отображении f есть открытое множество, содержащееся в G^0.

12°. Если G^0 не содержит внутренних точек, то каждая компонента множества $R^n - fG_g$ либо содержится в fG, либо не пересекается с fG, а образ каждый компоненты множества $G - f^{-1}fG_g$ есть некоторая компонента множества $R^n - fG_g$.

13°. Пусть O есть некоторая компонента множества $R^n - fG_g$. Тогда существует целое неотрицательное число $\gamma = \gamma(O)$ такое, что для почти всех (в смысле меры Лебега) точек $y \in O$ полный прообраз $f^{-1}y$ содержит в точности γ точек.

Замечание 3. Если в формулировке 13° заменить требование: $J(x) \geqslant 0$ (соответственно $J(x) \leqslant 0$) для всех $x \in G$ требованием: $J(x) \neq 0$ для всех $x \in G$, то слова „для почти всех“ заменятся словами „для всех“.

14°. Пусть $a \in G^+$ (соответственно $a \in G^-$). Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(G, a, f, \varepsilon) > 0$ такое, что для всякой связной окрестности O_y точки $f(a)$, содержащейся в $U(f(a), \delta)$, найдется и притом только одна связная окрестность O_x точки a, содержащаяся в $U(a, \varepsilon)$ и такая, что: $f O_x = O_y$; $f(O_x)_g = (O_y)_g$; $\operatorname{mes}[f(O_x \cap G^+)] = \operatorname{mes} O_y$ (соответственно $\operatorname{mes}[f(O_x \cap G^-)] = \operatorname{mes} O_y$).

В дальнейшем предполагаем, что $J(x) \geqslant 0$ (соответственно $J(x) \leqslant 0$) для всех $x \in G$, а множество G^0 не содержит внутренних точек.

Через S^n обозначаем пространство R^n, дополненное обычным образом бесконечно удаленной точкой до компакта.

Через E_g^{∞} обозначаем границу множества E в пространстве S^n. Через Φ всюду обозначаем компакт (т. е. замкнутое ограниченное множество), лежащий в G и не содержащий внутренних точек.

15°. Пусть A есть множество типа F_σ (см. ([4])), лежащее в G и не содержащее внутренних точек. Тогда и его образ fA не содержит внутренних точек.

Определение 2. Уменьшенное на единицу число компонент множества $R^n - \Phi$ назовем порядком связности компакта Φ и обозначим через $\pi(\Phi)$. Говорят, что Φ разбивает R^n, если $\pi(\Phi) \geqslant 1$. Скажем, что Φ регулярно разбивает G, если существует ограниченная компонента множества $R^n - \Phi$, содержащаяся в G. Число компонент множества G_g^∞ назовем порядком связности области G и обозначим через $\pi(G)$. Если $\pi(G) = 1$, то область G назовем односвязной.

Замечание 4. Считаем $\infty - 1 = \infty$.

Замечание 5. Если $\pi(\Phi) \geqslant \pi(G)$, то Φ регулярно разбивает G.

16°. Если Φ регулярно разбивает G, то его образ $f\Phi$ разбивает R^n.

Из замечания 5 и 16° следует:

17°. Если $\pi(\Phi) \geqslant \pi(G)$, то $f\Phi$ разбивает R^n.

Из 17° следует:

18°. Если область G является односвязной, а Φ разбивает R^n, то его образ $f\Phi$ также разбивает R^n.

Замечание 6. Простейший пример: $n = 2$, $G = R_z^2$, $f(z) = e^z$ показывает, что 17° не может быть усилено в направлении установления связи между числами $\pi(\Phi) - \pi(G)$ и $\pi(f\Phi)$ ([3]).

Тем не менее, имеет место:

19°. Если число компонент множества $R^n - \Phi$ бесконечно, то и число компонент множества $R^n - f\Phi$ также бесконечно.

В заключение выражаю глубокую и сердечную благодарность А. И. Маркушевичу за постановку основных вопросов, многочисленные ценные советы и указания и за внимание к моей работе.

Поступило
16 II 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. И. Адельсон-Вельский и А. С. Кронрод, ДАН, **49**, № 8 (1945). [2] В. Немыцкий, М. Слудская и А. Черкасов, Курс математического анализа, 2, 1944. [3] И. И. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного, 1945. [4] Ф. Хаусдорф, Теория множеств, 1937.