Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 1

МАТЕМАТИКА

И. П. НАТАНСОН

О ПОРЯДКЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ 2π-ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПРИ ПОМОЩИ ЕЕ ИНТЕГРАЛА ПУАССОНА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 6 III 1950)

Теорема 1. *Пусть $f(t)$ есть непрерывная 2π-периодическая функция с модулем непрерывности $\omega(\delta)$. Если*

$$P(x, r)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-x)+r^2}dt \tag{1}$$

есть ее интеграл Пуассона, то при всех x и r $(r_0\leqslant r\leqslant 1)$ будет

$$|P(x, r)-f(x)|\leqslant K\omega[(1-r)|\ln(1-r)|], \tag{2}$$

где K есть постоянная, зависящая только от r_0.

Доказательство. С помощью простых преобразований получаем

$$P(x, r)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}[f(x+2t)+f(x-2t)]\frac{1-r^2}{(1-r^2)+4r\sin^2 t}dt.$$

Кроме того,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{1-r^2}{(1-r)^2+4r\sin^2 t}dt=1. \tag{3}$$

Поэтому

$$P(x, r)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}[f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]\frac{1-r^2}{(1-r)^2+4r\sin^2 t}dt. \tag{4}$$

Но $|f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)|\leqslant 2\omega(2t)$. С другой стороны, $\omega(\lambda\delta)\leqslant(1+\lambda)\omega(\delta)$, и потому

$$\omega(2t)\leqslant\left\{1+\frac{2t}{(1-r)|\ln(1-r)|}\right\}\omega[(1-r)|\ln(1-r)|].$$

Отсюда и из (4), с учетом (3), вытекает, что

$$|P(x, r)-f(x)|\leqslant$$
$$\leqslant\omega[(1-r)|\ln(1-r)|]\left\{1+\frac{4(1+r)}{\pi|\ln(1-r)|}\int_0^{\pi/2}\frac{t\,dt}{(1-r)^2+4r\sin^2 t}\right\}.$$

Замечая, что $r<1$ и $\sin t \geqslant \frac{2}{\pi} t$, последнюю оценку можно усилить:

$$|P(x, r)-f(x)| \leqslant \omega[(1-r)|\ln(1-r)|]\left\{1+\frac{8\pi}{|\ln(1-r)|} \int_0^{\pi/2} \frac{t\,dt}{\pi^2(1-r)^2+16rt^2}\right\},$$

откуда

$$|P(x, r)-f(x)| \leqslant \omega[(1-r)|\ln(1-r)|]\left\{1+\frac{\pi}{2r|\ln(1-r)|} \ln\frac{1+r}{1-r}\right\}.$$

Значит, при условии $r_0 \leqslant r<1$ будет

$$|P(x, r)-f(x)| \leqslant \omega[(1-r)|\ln(1-r)|]\left\{1+\frac{\pi \ln 2}{2r_0|\ln(1-r_0)|}+\frac{\pi}{2r_0}\right\},$$

чем и доказана наша теорема.

Замечание 1. Из доказательства видно, что

$$K=1+\frac{\pi \ln 2}{2r_0|\ln(1-r_0)|}+\frac{\pi}{2r_0}.$$

В частности, при $r_0={}^1/_2$ получаем $K=1+2\pi$.

Замечание 2. Порядок оценки (2) улучшить нельзя. Действительно, для функций, удовлетворяющих условию Липшица, оценка (2) принимает вид

$$|P(x, r)-f(x)| \leqslant M(1-r)|\ln(1-r)|,$$

где M — постоянная, зависящая от функции. Беря, в частности, в качестве $f(t)$ 2π-периодическую функцию $f_1(t)$, совпадающую с $|t|$ на $[-\pi, \pi]$, получим

$$P(0, r)-f_1(0)=\frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{(1-r^2)\,t\,dt}{(1-r)^2+4r\sin^2 t},$$

откуда

$$P(0, r)-f_1(0)>\frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{(1-r^2)\,t\,dt}{(1-r)^2+4t^2}=\frac{1-r^2}{2\pi} \ln\frac{(1-r)^2+\pi^2}{(1-r)^2}$$

и, тем более,

$$|P(0, r)-f_1(0)|<\frac{1}{\pi}(1-r)|\ln(1-r)|.$$

Ограничиваясь функциями, удовлетворяющими условию Липшица, можно получить более точные результаты. Именно, пусть $Lip_1\alpha$ есть класс всех 2π-периодических функций, у которых $|f(x)-f(y)| \leqslant |x-y|^\alpha$. Для каждой из них по формуле (1) вводим интеграл $P(x, r)$, полагаем $\Delta(f, r)=\max|P(x, r)-f(x)|$ и вводим величину

$$u(\alpha, r)=\sup\{\Delta(f, r)\},$$

где $f(x)$ пробегает весь класс $Lip_1\alpha$. При этих обозначениях имеет место

Теорема 2. *Если* $0<r_0 \leqslant r<1$, *то справедливы асимптотические формулы* *

---

* Из формулы (6), в частности, вытекает, что для функций класса $Lip_1\alpha$, где $\alpha<1$, будет $|P(x, r)-f(x)| \leqslant K(1-r)^\alpha$, где $0<r_0 \leqslant r<1$ и K зависит лишь от r_0.

$$u(1, r) = \frac{2}{\pi}(1-r)\,|\ln(1-r)| + O(1-r), \tag{5}$$

$$u(\alpha, r) = (1-r)^{\alpha} \sec\frac{\pi\alpha}{2} + O(1-r) \quad (0<\alpha<1). \tag{6}$$

Доказательство. Формула (4) показывает, что для любой функции $f(x)$ из $Lip_1\alpha$ будет

$$\Delta(f, r) \leqslant \frac{2^{1+\alpha}}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{(1-r^2)\,t^{\alpha}\,dt}{(1-r)^2+4r\sin^2 t}.$$

Значит, и $u(\alpha, r)$ не превосходит этой величины. Но для 2π-периодической функции $f_\alpha(t)$, совпадающей с $|t|^{\alpha}$ на $[-\pi, \pi]$, будет

$$P(0, r) - f_\alpha(0) = \frac{2^{1+\alpha}}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{(1-r^2)\,t^{\alpha}dt}{(1-r)^2+4r\sin^2 t}.$$

Отсюда вытекает точное равенство

$$u(\alpha, r) = \frac{2^{1+\alpha}}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{(1-r^2)\,t^{\alpha}dt}{(1-r)^2+4r\sin^2 t}.$$

Но $\alpha>0$, и потому*

$$u(\alpha, r) = \frac{2^{1+\alpha}}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{(1-r^2)\,t^{\alpha}dt}{(1-r)^2+4rt^2} + O(1-r). \tag{7}$$

Если $\alpha=1$, то последний интеграл вычисляется в конечном виде, что дает формулу

$$u(1, r) = \frac{1-r^2}{2\pi r}\ln\frac{(1-r)^2+\pi^2 r}{(1-r)^2} + O(1-r),$$

равносильную (5). Если же $\alpha<1$, то мы произведем в интеграле, стоящем в (7), подстановку, принимая за новую переменную величину

$$x = \frac{4rt^2}{(1-r)^2}.$$

Это приводит к равенству

$$u(\alpha, r) = \frac{(1+r)(1-r)^{\alpha}}{2\pi r^{\frac{1+\alpha}{2}}}\int_0^{\pi^2 r/(1-r)^2}\frac{x^{\frac{\alpha-1}{2}}dx}{1+x} + O(1-r).$$

Но $\alpha<1$, и потому

$$\int_0^{\pi^2 r/(1-r)^2}\frac{x^{\frac{\alpha-1}{2}}dx}{1+x} = \int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{\alpha-1}{2}}}{1+x}\,dx + O\left((1-r)^{1-\alpha}\right).$$

---

* Здесь и в дальнейшем через $O(1-r)$ обозначается величина, не превосходящая $K(1-r)$, где, однако, постоянная K зависит от r_0.

Значит,

$$u(\alpha, r) = \frac{(1+r)(1-r)^{\alpha}}{2\pi r^{\frac{1+\alpha}{2}}} \int_{0}^{+\infty} \frac{x^{\frac{\alpha-1}{2}}\,dx}{1+x} + O(1+r).$$

Остается заметить, что

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x^{\frac{\alpha-1}{2}}\,dx}{1+x} = \pi \sec \frac{\pi\alpha}{2},$$

чтобы получить формулу (6).

Поступило
3 III 1950