Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 1

МАТЕМАТИКА

Ю. В. ЛИННИК

ЗАМЕЧАНИЕ О ПРОИЗВЕДЕНИИ ТРЕХ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 7 III 1950)

1. Поведение сумм трех простых чисел в настоящее время может быть изучено благодаря известному методу И. М. Виноградова. Интерпретация этого метода в терминах теории Лебега, в соединении с обычными методами теории распределения простых чисел, позволяет изучить и произведения трех простых чисел с точки зрения их распределения.

Именно, оказывается возможным доказать, что на всяком сегменте $[x, x+x^{1/2}M]$, где $M=e^{(\ln x)^{0,99}}$, присутствуют произведения трех простых чисел и имеет место асимптотическое соотношение:

$$\sum_{x\leqslant pp'p''\leqslant x+x^{1/2}M_1} a_p a_{p'} b_{p''} = \sum_{x\leqslant nn'n''\leqslant x+x^{1/2}M_2,} \frac{a_n}{\ln n}\frac{a_{n'}}{\ln n'}\frac{b_{n''}}{\ln n''} + $$
$$+ O(x^{1/2} M_1 e^{-(\ln\ln x)^2}), \tag{1}$$

где $M_1 = M^{c_0}$, $c_0<1$; $a_m = e^{-\ln^2\frac{m}{x}M_1}$; $b_m = e^{-\ln^2\frac{m}{M_1}}$; p, p', p'' — простые числа; n, n', n'' — целые числа, откуда такое утверждение о существовании следует.

2. Наметим основные шаги доказательства. Полагаем $M=e^{(\ln x)^{0,99}}$; $h=x^{1/2}M_1$; $M_1=M^{c_0}$; $h_1=x^{1/2}/M_1$; $c_0<1$ такое, что $\ln h_1/\ln M_1$ целое число; $T=x^4$; $t_0=\ln^{10}x$; $t_1=h_1$; $t_2=2t_1, \ldots, t_k=2t_{k-1}, \ldots$; последнее t_k заменим на T;

$$P_1(s)=\sum_{p=2}^{\infty} e^{-\ln^2\frac{M_1}{x^{1/2}}p} p^{-s};\quad P_2(s)=\sum_{n=2}^{\infty} e^{-\ln^2\frac{M_1}{x^{1/2}}n}\frac{1}{\ln n}n^{-s};$$

$$Q_1(s)=\sum_{p=2}^{\infty} e^{-\ln^2\frac{p}{M_1}} p^{-s};\quad Q_2(s)=\sum_{n=2}^{\infty} e^{-\ln^2\frac{n}{M_1}}\frac{1}{\ln n}n^{-s}.$$

Тогда (1) будет следовать из оценки:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{1+\frac{1}{\ln x}-Ti}^{1+\frac{1}{\ln x}+Ti} \frac{(x+h)^s-x^s}{s}F(s)\,ds = O(he^{-(\ln\ln x)^2}), \tag{2}$$

где $F(s)=[P_1(s)]^2Q_1(s)-[P_2(s)]^2Q_2(s)$.

Для доказательства (2) заменяем контур на $L = L_1 + L_2 + L_3$, где L_1 есть контур: $\sigma = 1 - \frac{(\ln\ln x)^4}{\ln x}$, $|t| < \ln^{10} x = t_0$; L_2 — два горизонтальных кусочка, строение которых будет видно из дальнейшего, и L_3 — спрямляемая кривая $\sigma = \sigma(t)$, полученная следующим образом: 1) она вся лежит в полосе $\sigma \geqslant 1/2$, $t_0 \leqslant |t| \leqslant T$; 2) на самой кривой имеем: $|P_i(s)| \leqslant \ln^2 x$, $|Q_i(s)| \leqslant \ln^2 x$; 3) правее кривой при $\sigma > \sigma(t)$ имеем: $|P_i(s)| < \ln^2 x$, $|Q_i(s)| < \ln^2 x$.

Лемма. *Для кривой $\sigma = \sigma(t)$ имеем*:

1) $\sigma \leqslant 1 - \frac{(\ln t)^{0,06}}{\ln t} < 1 - \frac{(\ln x)^{0,06}}{\ln x}$;

2) *общая длина кусочков кривой $\sigma = \sigma(t)$, расположенных между $\sigma = \frac{1}{2} + \nu$ и $\sigma = \frac{1}{2} + \nu + \frac{1}{\ln^2 x}$ $\left(0 \leqslant \nu < \frac{1}{2}\right)$ и $T_k \leqslant |t| \leqslant T_{k=1}$, не превосходит $T_k \left(\frac{x^{1/2}}{M_1}\right)^{-2\nu} e^{(\ln x)^{0,02}}$.*

Утверждение 1) следует из теоремы Н. Г. Чудакова ([1]) о том, что $\zeta(s) \neq 0$ при $\sigma > 1 - c_0 \ln(|t| + 4)^{10/11}$. Утверждение 2) в основном выводится из интегральной оценки:

$$\int_{T_k}^{2T_k} \left| P_i\left(\frac{1}{2} + \nu + it\right)\right|^2 dt \ll T_k \left(\frac{x^{1/2}}{M_1}\right)^{-2\nu} \ln^{10} x \quad (i = 1, 2)$$

и сходных оценок для интегралов от подходящих степеней $Q_i(s)$ $(i = 1, 2)$ *. (Такие интегральные оценки, позволяющие оценить меру множества, где подинтегральная функция больше данного числа, как оказывается, дают своеобразную интерпретацию метода И. М. Виноградова для оценки $\sum\limits_{p \leqslant N} e^{2\pi i \alpha p}$ и приводят к такого рода оценкам.)

L_2 — два горизонтальных кусочка, соединяющих L_1 и L_3. Для дальнейших вычислений действуем известным образом ([2]). При $|t| \leqslant t_1$ разлагаем $\frac{(x+h)^s - x^s}{s}$ по биному Ньютона, удерживая лишь первый член, а при $|t| > t_1$ интегрируем по контуру L_3, делая оценку модуля подинтегральной суммы. В частности, берем $\left|\frac{(x+h)^s - x^s}{s}\right| < \frac{4x^{1/2+\nu}}{t}$ при $s = \frac{1}{2} + \nu + it$.

Поступило
27 II 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Г. Чудаков, Матем. сборн., 1 (43), № 6, 799 (1936). [2] G. Hoheisel, Sitzungsber. Preuss. Akad. (1930).

* Здесь важно, что $\ln h_1 / \ln M_1$ целое число.