Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 1

МАТЕМАТИКА

Ю. М. БЕРЕЗАНСКИЙ и С. Г. КРЕЙН

КОНТИНУАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 7 X 1949)

В настоящей заметке мы изучаем класс коммутативных нормированных колец, которые представляют собой обобщение алгебр конечного ранга в том же направлении, в котором групповое кольцо непрерывной группы является обобщением группового кольца конечной группы ([1], [2]).

Роль базиса алгебры играет здесь некоторый компакт, элементами алгебры служат функции, определенные на этом компакте и суммируемые по некоторой мере; вместо структурных констант c_{ijk}, определяющих закон перемножения элементов алгебры, рассматривается структурная мера $C(A, B, q)$ (см. 1°)*. Близкими к нашим кольцам являются кольца, изученные Б. Левитаном в связи с операцией обобщенного сдвига ([3]).

1°. Пусть Q — некоторый компакт. Через $[Q]$ обозначим тело его борелевских множеств.

Функцию $C(A, B, q)$ $(A, B \in [Q], q \in Q)$ назовем структурной мерой, если она удовлетворяет следующим требованиям:

α) $C(A, B, q)$ при фиксированных B, q является неотрицательной конечной абсолютно аддитивной регулярной мерой относительно A, причем $C(O, Q, q) > 0$ $(q \in Q)$, если O открыто.

β) $C(A, B, q)$ напрерывна по q при фиксированных A и B.

γ) Условие ассоциативности:

$$\int C(A, B, t)\, d_t C(E_t, D, q) = \int C(B, D, t)\, d_t C(A, E_t, q) \text{ ** } \quad (A, B, D \in [Q],\ q \in Q).$$

δ) Условие коммутативности:

$$C(A, B, q) = C(B, A, q) \quad (A, B \in [Q],\ q \in Q).$$

Неотрицательную конечную абсолютно аддитивную меру $m(E)$ $(E \in [Q])$, отличную от тождественного нуля, мы назовем мультипликативной относительно структурной меры $C(A, B, q)$, если для каждых $A, B \in [Q]$ имеет место равенство

$$m(A)\, m(B) = \int C(A, B, q)\, dm(q).$$

Теорема 1. *Для каждой структурной меры существует по крайней мере одна мультипликативная, причем все мультипликативные меры абсолютно непрерывны одна относительно другой.*

---

* Идея подобного построения была высказана И. М. Гельфандом на его семинаре в МГУ.

** Здесь и всюду в дальнейшем интегралы без указания области интегрирования следует понимать распространенными на все Q.

Доказательство. Рассмотрим в пространстве $C(Q)$ всех вещественных непрерывных на Q функций $f(q)$ семейство линейных операторов

$$(T_0 f)(q)=\int f(t)\,d_t C(E_t, O, q) \quad (f \in C(Q)),$$

где O — любое открытое множество из Q. Операторы T_0 непрерывны в равномерной норме, переводят каждую положительную функцию в положительную и коммутируют между собой. В силу теоремы М. Г. Крейна ([4]), в сопряженном к $C(Q)$ пространстве существует собственный положительный вектор, общий для всех операторов T_0^*, т. е. такой позитивный непрерывный функционал $L(f)$ $(f \in C(Q))$, что

$$L(T_0 f)=\lambda_0 L(f) \quad (\lambda_0 \geqslant 0) \tag{1}$$

для всех открытых $O \subset Q$. Согласно теореме А. Маркова ([5]), этот функционал может быть представлен в виде

$$L(f)=\int f(q)\,d\psi(q),$$

где $\psi(E)$ — неотрицательная конечная абсолютно аддитивная мера, определенная на теле $[Q]$. Тогда равенство (1) переходит в

$$\int\left(\int f(t)\,d_t C(E_t, O, q)\right)d\psi(q)=\lambda_0\int f(q)\,d\psi(q). \tag{2}$$

Полагая $f(q)=1$, находим λ_0, после чего формула (2) принимает вид

$$\int\left(\int f(t)\,d_t C(E_t, O, q)\right)d\psi(q)=\frac{1}{\psi(Q)}\int f(q)\,d\psi(q)\cdot\int C(Q, O, q)\,d\psi(q).$$

Предельным переходом распространяем эту формулу на тот случай, когда f — характеристическая функция борелевского множества A и $O=B \in [Q]$. Тогда имеем

$$\int C(A, B, q)\,d\psi(q)=\frac{\psi(A)}{\psi(Q)}\int C(Q, B, q)\,d\psi(q)=\frac{\psi(A)}{\psi(Q)}\int C(B, Q, q)\,d\psi(q)=$$
$$=\frac{\psi(A)}{\psi(Q)}\frac{\psi(B)}{\psi(Q)^2}\int C(Q, Q, q)\,d\psi(q) \quad (A, B \in [Q]).$$

Отсюда видно, что мера

$$m(E)=\frac{\psi(E)}{\psi(Q)^2}\int C(Q, Q, q)\,d\psi(q) \quad (E \in [Q])$$

будет мультипликативной. Вторая часть теоремы легко следует из определения мультипликативной меры.

2°. Зафиксируем некоторую мультипликативную меру и будем обозначать интеграл по этой мере через $\int \ldots' dq$, через $f(A)$ обозначим $\int_A f(q)\,dq$ $(A \in [Q])$. Пусть L_1 — пространство всех суммируемых функций по мере dq. Пользуясь теоремой, аналогичной теореме Фубини, можно показать, что для каждых $x, y \in L_1$ интеграл

$$\int x(t)\,d_t'\left(\int y(\tau)\,d_\tau C(E_t, E_\tau, q)\right)$$

существует почти для всех q и принадлежит к L_1, причем

$$\int \left| \int x(t)\, d_t \left(\int y(\tau)\, d_\tau C(E_t, E_\tau, q) \right) \right| dq \leqslant \int |x(t)|\, dt \cdot \int |y(t)|\, dt.$$

Отсюда следует

Теорема 2. *Пространство L_1 с нормой $\| x \| = \int |x(t)|\, dt$ и операцией умножения*

$$(x * y)(q) = \int x(t)\, d_t \left(\int y(\tau)\, d_\tau C(E_t, E_\tau, q) \right) \tag{3}$$

является коммутативным нормированным кольцом, причем $\| x * y \| \leqslant \| x \| \, \| y \|$.

Полученное кольцо мы и называем континуальной алгеброй. Эта алгебра может содержать или не содержать единицу, причем более интересным и сложным является последний случай. В дальнейшем мы ограничиваемся этим случаем, причем единицу e будем формально присоединять к алгебре.

3°. Измеримую функцию $\chi(q)$ $(q \in Q)$, не аннулирующуюся почти всюду, назовем характером алгебры, если в существенном $|\chi(q)| \leqslant 1$ и для каждых A, $B \in [Q]$ имеет место равенство

$$\chi(A)\chi(B) = \int C(A, B, q)\chi(q)\, dq. \tag{4}$$

Между максимальными идеалами алгебры и ее характерами существует тесная связь, аналогичная случаю группового кольца:

Каждому максимальному идеалу $M \neq L_1$ алгебры соответствует характер $\chi_M(t)$, причем

$$x(M) = \int x(t)\chi_M(t)\, dt \quad (x \in L_1). \tag{5}$$

Это утверждение является простым следствием теоремы об общем виде линейного функционала в L_1 и равенства

$$\int C(A, B, q)\chi_M(q)\, dq = \int (\varkappa_A * \varkappa_B)(q)\chi_M(q)\, dq = (\varkappa_A * \varkappa_B)(M) =$$
$$= \varkappa_A(M)\varkappa_B(M) = \chi_M(A)\chi_M(B).$$

Здесь $\varkappa_A(t)$ обозначает характеристическую функцию множества A.

Каждый характер $\chi(q)$ алгебры порождает ее максимальный идеал $M_\chi \neq L_1$ по формуле

$$(\lambda e + x)(M_\chi) = \lambda + \int x(q)\chi(q)\, dq \quad (x \in L_1). \tag{6}$$

В самом деле, из ограниченности $\chi(q)$ заключаем, что выражение $l(x) = \int x(t)\chi(t)\, dt$ является линейным функционалом в L_1. Мультипликативность этого функционала следует из (4).

Сравнивая формулы (5) и (6), легко видеть, что характер порождается порожденным им максимальным идеалом. Максимальный идеал, отличный от L_1, порождается порожденным им характером.

Каждая континуальная алгебра обладает по крайней мере одним характером — тождественной единицей. Легко строится пример алгебры, не содержащей иных характеров, кроме единицы. Однако, если у алгебры отсутствует радикал (такие алгебры мы будем называть полупростыми), то характеров достаточно много: для каждых

A, $B \in [Q]$ таких, что $m(A - A \cap B) + m(B - A \cap B) > 0$, найдется характер χ, для которого $\chi(A) \neq \chi(B)$.

Приведем примеры континуальных алгебр.

4°. Групповое кольцо компактной коммутативной группы G является алгеброй: свертку

$$(x * y)(g) = \int_G x(gh^{-1}) y(h)\, dh \tag{7}$$

двух суммируемых в мере Хаара функций $x(g)$, $y(g)$ $(g \in G)$ можно представить в виде (3), если положить $C(A, B, g) = (\varkappa_A * \varkappa_B)(g) = \Delta(A^{-1}g \cap B)$, где Δ — мера Хаара. Мультипликативной мерой является мера Хаара, характерами служат измеримые характеры группы.

5°. Примем за Q замкнутый интервал $[-1, 1]$, определим композицию функций равенством

$$(x * y)(q) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \int_{tq-(1-t^2)^{1/2}(1-q^2)^{1/2}}^{tq+(1-t^2)^{1/2}(1-q^2)^{1/2}} x(t) y(\tau) [(1-t^2)(1-q^2) - (\tau - tq)^2]^{-1/2}\, d\tau\, dt. \tag{8}$$

Функция $C(A, B, q) = (\varkappa_A * \varkappa_B)(q)$ является структурной мерой, с ее помощью композицию (8) можно записать в виде (3). Мультипликативной мерой служит лебегова мера, алгебра не содержит единицы. Характерами являются полиномы Лежандра $P_n(t)$.

6°. Как и выше $Q = [-1, 1]$, определим композицию функций равенством

$$(x * y)(q) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} [x(qt + (1-q^2)^{1/2}(1-t^2)^{1/2}) + x(qt - (1-q^2)^{1/2}(1-t^2)^{1/2})]\, y(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \tag{9}$$

Просто проверяется, что функция $C(A, B, q) = (\varkappa_A * \varkappa_B)(q)$ является структурной мерой, с ее помощью умножение (9) может быть записано в виде (3). Мультипликативной мерой служит мера $m(E) = \int_E \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ $(E \in [Q])$, алгебра не содержит единицы. Характерами являются полиномы $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$, отличающиеся только численными множителями от полиномов Чебышева.

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
7 X 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд, Д. А. Райков и Г. Е. Шилов, Усп. матем. наук, **1**, 2 (12) (1946). [2] Д. А. Райков, Тр. Матем. ин-та им. Стеклова, **14** (1945). [3] Б. М. Левитан, ДАН, **47**, №№ 1, 3, 5, 6 (1945). [4] М. Г. Крейн и М. А. Рутман, Усп. матем. наук, **3**, 1 (23) (1948). [5] А. Марков, Матем. сборн., **4** (46), № 1 (1938).