Периодические тепловые процессы в двухкомпонентных системах с конкурирующими источниками энергии

О.Н. Шабловский
Гомельский государственный технический университет, Гомель, Белоруссия
e-mail: shabl@gstu.gomel.by

Введение. Волновое уравнение, содержащее нелинейный источниковый член, позволяет моделировать разнообразные физические процессы. Типичный пример: уравнение синус - Гордона, описывающее волны в ферромагнетиках, дислокации в кристаллах и др. В докладе представлены новые результаты исследования уравнения волнового теплопереноса в однокомпонентных и двухкомпонентных системах с нелинейными источниками энергии. Прикладные аспекты данной работы связаны с проблемой высокоскоростной кристаллизации: взрывная кристаллизация аморфных пленок [1]; кристаллизация из глубоко переохлажденного расплава [2, 3].

Однокомпонентные системы. Волновое уравнение теплопереноса с источником энергии имеет вид:

$$T_{tt} = w^2 T_{xx} + k_\upsilon, \qquad (1)$$

где x - декартова координата; t - время; T - температура; $w^2 = \lambda/(c\gamma)$ - квадрат скорости распространения тепловых возмущений; λ - коэффициент теплопроводности; c - объемная теплоемкость; γ - время релаксации теплового потока; $k_\upsilon = q_\upsilon/(c\gamma)$; q_υ - мощность внутренних источников тепла; независимая переменная в роли нижнего индекса означает дифференцирование. Современное состояние теории локально – неравновесного теплопереноса дано в [4]. Укажем здесь три новых точных решения уравнения (1).

I. $$k_\upsilon(T) = 2T\left(A^2T^2 - \theta_1^2\right)/(AB), \quad T(z) = \theta(z)/A,$$
$$z = (\alpha/A) - (\beta/B), \quad \alpha = x' + t, \quad \beta = x' - t, \quad x' = x/w,$$
$$\theta(z) = \theta_1(1-E)/(1+E), \quad E = \exp\left[\theta_1\left(z - z_1^1\right)\right], \quad z_1^1 - \text{const},$$
$$A < 0, \quad B > 0, \quad \theta_1 > 0, \quad x \le 0, \quad z \ge 0, \quad T(z \to \infty) = -\theta_1/A,$$
$$(1/A) + (1/B) > 0.$$

Функция источника $k_\upsilon(T)$имеет максимум при $T = T_*$, $A^2T_*^2 = \theta_1^2/3$. При $T > T_*$ функция $k_\upsilon(T)$ монотонно убывает и при $T = T_1$, $A^2T_1^2 = \theta_1^2$ меняет знак с плюса на минус.

II. $$k_\upsilon(T)/4 = (\theta_2 T/AB) - 3T^2 < 0, \quad T(z) = \theta(z)/(AB),$$
$$\theta(z) = -2\theta_2 E/(1-E)^2, \quad E = \exp\left[\left(z - z_1^1\right)\sqrt{\theta_2}\right],$$

$$\left(1/B\right) > 1/\left(-A\right) > 0,\quad x \le 0,\quad z \ge 0,\quad \theta_2 > 0.$$

Переменная z - такая же, как в I. Данное решение обладает сильной физической нелинейностью из-за того, что при больших температурах резко возрастает отвод энергии, $dk_\upsilon / dT < 0$.

III.
$$k_\upsilon / 4 = \exp T - \left(2c_1\varphi / AB\right)\left[1 - \left(AB / 2c_1^2\right)\exp T\right]^{1/2},$$
$$AB\exp T = 2c_1^2\left[\operatorname{ch}\left(c_1\varphi + c_2\right)\right]^{-2},\quad \varphi = -\exp(-z),$$
$$\left(1/B\right) > 1/\left(-A\right) > 0,\quad x \ge 0,\quad z \ge 0,\quad c_1, c_2 - \mathrm{const}.$$

Функция источника $k_\upsilon(T, z)$ имеет экстремум по температуре T вдоль тех линий $z = \mathrm{const}$, для которых выполнено неравенство $2c_1 > \exp(-z)$.

Двухкомпонентные системы. Система двух зацепляющихся волновых уравнений с источниками энергии имеет вид:

$$\left(T_j\right)_{tt} = w_j^2\left(T_j\right)_{xx} + k_\upsilon^{(j)}\left(T_1, T_2\right),\quad j = 1, 2, \tag{2}$$

где T_1, T_2 - температуры взаимодействующих друг с другом компонентов сплошной среды; w_1, w_2 - две скорости распространения тепловых возмущений. В классе решений типа распространяющейся волны получаем из (2) динамическую систему с двумя степенями свободы:

$$\frac{d^2T_j(\xi)}{d\xi^2} = Q_j\left(T_1, T_2\right), \tag{3}$$

$$\xi = A_* x + B_* t,\quad N = -B_* / A_*,\quad M_j^2 = N^2 / w_j^2,$$
$$Q_j\left(T_1, T_2\right) = k_\upsilon^{(j)}\left(T_1, T_2\right) / \left[w_j^2 A_*^2\left(M_j^2 - 1\right)\right],$$
$$A_*, B_* - \mathrm{const}.$$

Здесь ξ- автомодельная переменная; скорость перемещения ξ- линии равна $N = dx/dt$, причем $N^2 \ne w_j^2$, т.е. ξ- линия не является характеристикой. Важную роль играет величина M теплового числа Маха. Например, для первой компоненты $(j = 1)$: 1) $Q_1\left(T_1, T_2\right) > 0$, если в сверхзвуковом процессе $\left(M_1^2 > 1\right)$ имеем источник энергии $\left(k_\upsilon^{(1)} > 0\right)$ либо если в дозвуковом процессе $\left(M_1^2 < 1\right)$ имеем сток энергии $\left(k_\upsilon^{(1)} < 0\right)$; 2) $Q_1\left(T_1, T_2\right) < 0$, если $M_1^2 > 1$, $k_\upsilon^{(1)} < 0$ либо если $M_1^2 < 1$, $k_\upsilon^{(1)} > 0$.

Далее рассматриваем процессы, для которых $Q_j = Q_j\left(\tau_1, \tau_2\right)$, где $\tau_j = T_j - T_j^0$; $j = 1, 2$; $T_j^0 \equiv \mathrm{const}$. Укажем новые точные периодические решения IV-VI динамической системы (3). Алгоритм построения этих решений продемонстрируем на примере I. Автомодельную переменную z запишем в виде

$$z = z_1 x' + z_2 t,\quad z_1 = (B - A)/(AB),\quad z_2 = (B + A)/(AB).$$

Сделаем замену аргументов $x' \to x$, $it \to y$ и переобозначим $T \to \tau$. Тогда исходное гиперболическое уравнение (1) преобразуется в эллиптическое уравнение $\tau_{xx}+\tau_{yy}=-k_\upsilon(\tau)$, где $\tau=\tau_1(x,y)+i\tau_2(x,y)$. Выделяя действительную и мнимую части в формуле для $k_\upsilon(\tau)$, см. I, получаем точное решение системы двух зацепляющихся эллиптических уравнений с нелинейными источниками:

$$A\tau_1(x,y)=\theta_1\left[1-\left(E_1^1\right)^2\exp(2\theta_1 z_1 x)\right]/\delta,$$
$$A\tau_2(x,y)=\theta_1\left[2E_1^1\exp(\theta_1 z_1 x)\sin(\theta_1 z_2 y)\right]/\delta,$$
$$E_1=E_1^1\exp(\theta_1 z_1 x)\cos(\theta_1 z_2 y),\quad E_2=E_1^1\exp(\theta_1 z_1 x)\sin(\theta_1 z_2 y),$$
$$\delta=(1+E_1)^2+E_2^2\neq 0.$$

Теперь возьмем $A=B$, т.е. $z_1=0$, и переобозначим $y\to\xi$. В итоге получаем решение IV динамической системы (3). Случай $A+B=0$ новых решений не содержит.

IV. $$Q_1=-k_1\tau_1-2\left(\tau_1^3-3\tau_1\tau_2^2\right),\quad Q_2=-k_1\tau_2-2\left(3\tau_1^2\tau_2-\tau_2^3\right),$$
$$k_1=-2\theta_1^2/A^2,\quad E_1^1=\exp\left(-\theta_1 z_1^1\right),\quad z_1^1\neq 0,$$
$$A\tau_1=\theta_1\left[1-\left(E_1^1\right)^2\right]/\delta,\quad A\tau_2=2\theta_1 E_1^1\left[\sin(2\theta_1\xi/A)\right]/\delta,\quad \delta\neq 0,$$
$$\delta=1+\left(E_1^1\right)^2+2E_1^1\cos(2\theta_1\xi/A),\quad \xi\in(-\infty,\infty),$$

где A,θ_1,z_1^1- произвольные постоянные.

V. $$Q_1=-k_1\tau_1+12\left(\tau_1^2-\tau_2^2\right),\quad Q_2=-k_1\tau_2+24\tau_1\tau_2,$$
$$k_1=4\theta_1^2/A^2,\quad E_1^1=\exp\left(-\theta_1 z_1^1\right),\quad z_1^1\neq 0,$$
$$A^2\tau_1=-2\theta_1^2\left[E_1+(E_1-2)\left(E_1^1\right)^2\right]/\delta,\quad \delta\neq 0,$$
$$A^2\tau_2=2\theta_1^2E_2\left[1-\left(E_1^1\right)^2\right]/\delta,$$
$$E_1=E_1^1\cos(2\theta_1\xi/A),\quad E_2=E_1^1\sin(2\theta_1\xi/A),\quad \xi\in(-\infty,\infty),$$

где A,θ_1,z_1^1- произвольные постоянные.

VI. $$Q_1=4\exp\tau_1\cos\tau_2,\quad Q_2=4\exp\tau_1\sin\tau_2,$$
$$\exp\tau_1=2c_1^2A^{-2}\left[\mathrm{sh}^2c_2+\cos^2(2c_1\xi/A)\right]^{-1},$$
$$\tau_2=\pi n_0+\mathrm{arctg}D,$$
$$D=-\mathrm{ch}\,c_2\,\mathrm{sh}\,c_2\sin(4c_1\xi/A)\left[\mathrm{ch}^2c_2\cos(4c_1\xi/A)+\sin^2(2c_1\xi/A)\right]^{-1},$$

где c_1,c_2 - произвольные ненулевые постоянные; выбор целого числа n_0 влияет на величину τ_2 при некотором фиксированном ξ.

Свойства источников энергии. Точные решения IV, V, VI получены для трех пар функций $Q_j(\tau_1,\tau_2)$. Этим функциям соответствуют источники $k_\upsilon^{(j)}=Q_j w_j^2A_*^2\left(M_j^2-1\right)$, $j=1,2$. Если для обеих компонент процесс дозвуковой $\left(M_j^2<1\right)$ или сверхзвуковой $\left(M_j^2>1\right)$, то имеем инверсию: знаки функций $k_\upsilon^{(j)}$ меняются на противоположные при переходах «дозвук$\leftrightarrow$сверхзвук». Двухкомпонентную систему назовем контрастной, если $M_1^2 < 1$, $M_2^2 > 1$ или $M_1^2 > 1$, $M_2^2 < 1$. Значит, одинаковая в математическом отношении структура периодических решений IV-VI присуща трем типам двухкомпонентных систем: дозвуковым, сверхзвуковым и контрастным. Различия между этими системами обусловлены числовыми значениями констант w_1^2, w_2^2, B_*^2 / A_*^2.

В дозвуковом и сверхзвуковом процессах, когда контрастности нет, источники энергии обладают такими свойствами:
1) одинаковые знаки скоростей изменения источников по температуре «своей» компоненты,

$$\operatorname{sgn}\left[\partial q_\upsilon^{(1)} / \partial T_1\right] = \operatorname{sgn}\left[\partial q_\upsilon^{(2)} / \partial T_2\right];$$

2) противоположные знаки скоростей изменения источников по температуре «чужой» компоненты,

$$\operatorname{sgn}\left[\partial q_\upsilon^{(1)} / \partial T_2\right] = -\operatorname{sgn}\left[\partial q_\upsilon^{(2)} / \partial T_1\right].$$

Для контрастных систем свойства источников меняются принципиальным образом:

$$\operatorname{sgn}\left[\partial q_\upsilon^{(1)} / \partial T_1\right] = -\operatorname{sgn}\left[\partial q_\upsilon^{(2)} / \partial T_2\right], \quad \operatorname{sgn}\left[\partial q_\upsilon^{(1)} / \partial T_2\right] = \operatorname{sgn}\left[\partial q_\upsilon^{(2)} / \partial T_1\right].$$

Обсудим теперь конкурентное взаимодействие источников энергии. В случае IV функция $Q_1(\tau_1, \tau_2)$ обращается в ноль при $\tau_1 = 0$. Именно на этой изотерме второй источник имеет экстремум по «чужой» температуре: $\partial Q_2 / \partial \tau_1 = 0$. Точно так же ведут себя эти источники по отношению к температуре τ_2:

$$\tau_2 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad \partial Q_1 / \partial \tau_2 = 0. \tag{4}$$

В случае V свойство (4) тоже выполняется. В случае VI конкуренция проявляется наиболее выразительно. Свойство (4) выполнено на изотермах $\tau_2 = \pi n_0$, где $n_0 < \infty$ любое целое число. Кроме того, $Q_1 = 0$ при $\tau_2 = 2\pi n_0 \pm (\pi / 2)$, и на этих изотермах второй источник имеет экстремум по «своей» температуре, $\partial Q_2 / \partial \tau_2 = 0$. Следовательно, по отношению к температуре τ_2 второй компоненты наблюдается перемежаемость изотерм

$$\tau_2 = \pi n_0, \quad \tau_2 = 2\pi n_0 \pm (\pi / 2),$$

на которых один источник обращается в ноль, а другой достигает экстремум.

[1] O.N.Shablovsky, Crystallography Reports **50**, Suppl. 1, 62 (2005).
[2] О.Н.Шабловский, Прикладная физика, №3, 29 (2007).
[3] О.Н.Шабловский, Поверхность, №11, 106 (2008).
[4] О.Н.Шабловский, Релаксационный теплоперенос в нелинейных средах, ГГТУ, Гомель (2003).