ДВУХСКОРОСТНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В СИСТЕМАХ С ИСТОЧНИКАМИ ЭНЕРГИИ ТИПА «ВЕДУЩИЙ – ВЕДОМЫЙ»

О.Н.Шабловский

Гомельский государственный технический университет, Гомель, Беларусь
e-mail: shablovsky-on@yandex.ru; shabl@gstu.by

Введение. Волновые уравнения, содержащие гиперболические, экспоненциальные и тригонометрические нелинейности (нелинейные уравнения вида Клейна-Гордона) позволяют моделировать разнообразные физические процессы: волны в ферромагнетиках, дислокации в кристаллах и др. В докладе представлены новые результаты исследования уравнений волнового теплопереноса в однокомпонентных и двухкомпонентных системах с нелинейными источниками энергии. Прикладные аспекты данной работы связаны с проблемой взрывной кристаллизации аморфных пленок, напыленных на подложку [1, 2].

Однокомпонентные системы. Волновое уравнение теплопереноса с источником энергии имеет вид:

$$(T_1)_{tt} = w_1^2 (T_1)_{xx} + k_\upsilon^{(1)}(T_1), \qquad (1)$$

где x – декартова координата; t – время; T_1 – температура; $w_1^2 = \lambda_1/(c_1\gamma_1)$ – квадрат скорости распространения тепловых возмущений; λ_1 – коэффициент теплопроводности; c_1 – объемная теплоемкость; γ_1 – время релаксации теплового потока; $k_\upsilon^{(1)} = q_\upsilon^{(1)}/(c_1\gamma_1)$; $q_\upsilon^{(1)}$ – мощность внутренних источников тепла; независимая переменная в роли нижнего индекса означает дифференцирование. Современное состояние теории локально-неравновесного теплопереноса дано в [3]. Укажем здесь пять новых точных решений уравнения (1). Уравнению (1) соответствует динамическая система

$$d^2\theta/d\xi^2 = Q(\theta),\ k_\upsilon^{(1)} = (B_*^2 - w_1^2 A_*^2)Q(\theta),\ \xi = A_* x + B_* t, \qquad (2)$$

$$\theta = T_1 - T_1^0,\ T_1^0 \equiv \mathrm{const} > 0.$$

Здесь A_*, B_* – const; $N_\xi = -B_*/A_*$ – скорость перемещения ξ–линии; $\mathrm{M}_\xi^2 = N_\xi^2/w_1^2$ – квадрат числа Маха; в дозвуковом процессе $\mathrm{M}_\xi^2 < 1$, в сверхзвуковом процессе $\mathrm{M}_\xi^2 > 1$. Вырожденный «звуковой» вариант $\mathrm{M}_\xi^2 = 1$ приводит к классическому решению Даламбера волнового уравнения без источников. Периодические решения I–IV представим в следующей форме.

I. $$\theta(\xi) = \ln[(1+u)/(1-u)]^2,\ u = [(1-m-g_*^2)/(-m)]^{1/2}\sin(\xi\sqrt{-m}),$$

$$Q(\theta) = \mathrm{sh}\,\theta + 2(1-m)\,\mathrm{sh}(\theta/2) - 2g_*^2\,\mathrm{th}(\theta/4)\,\mathrm{sh}^2(\theta/2),$$

$$m < 0,\ 1 < g_*^2 < 1-m.$$

II. $$\theta(\xi) = 4\,\mathrm{arctg}\,u,\ u = [(1-m)/m]^{1/2}[\cos(\xi\sqrt{1-m})]^{-1}.$$

$$Q(\theta) = 2m\sin(\theta/2) - \sin\theta,\ 0 < m < 1.$$

III. $$\theta(\xi) = 4\,\mathrm{arctg}\,u,\ u = [(1-m)/m]^{1/2}\cos(\xi\sqrt{m}),$$

$$Q(\theta) = 2(m-1)\sin(\theta/2) - \sin\theta,\ 0 < m < 1.$$

IV. $$\theta(\xi) = \ln[A_1 + 2\alpha\cos(m\xi)]^2,\ A_1^2 > 4\alpha^2,\ A = 8m^2\alpha^2,$$

$$Q(\theta) = 2(m^2A_1^2 - A)\exp(-\theta) - 2m^2A_1\exp(-\theta/2),$$

где α, m – произвольные постоянные. Отметим, что для случаев I–III температура $T_1 = T_1^0$ является нейтральной, потому что $Q(\theta = 0) = 0$. Вариант IV отличается тем, что $Q(\theta = 0) = -A < 0$. Во всех четырех случаях знак источника k_υ^1 зависит, согласно (2), от числа Маха. Для одной и той же функции $Q(\theta)$ переход от одного режима к другому («дозвук» $\leftrightarrow$ «сверхзвук») означает инверсию знака источника энергии. Варианты II и III относятся к двойному уравнению синус-Гордона.

В дополнение к варианту I, для которого источник $Q(\theta)$ содержит гиперболические нелинейности, укажем еще одно новое точное решение:

V. $$k_\upsilon^{(1)} = -\mathrm{sh}(T_1 - T_1^0),$$

$$\exp(T_1 - T_1^0) = \left[\frac{\sin(t/k) - (x/kw_1)}{\sin(t/k) + (x/kw_1)}\right]^2,\ x^2/(kw)^2 > 1,\ k \equiv \mathrm{const}.$$

В данном случае в указанной области определения решения при каждом фиксированном x знакопеременный источник энергии генерирует колебания температуры около изотермы $T_1 = T_1^0$.

Двухкомпонентные системы. Поведение 1-й компоненты определяется уравнением (1) с источником вида (2), который зависит только от температуры «своей» компоненты. В этом смысле он является «ведущим» для второго источника

$$k_\upsilon^{(2)} = (T_2 - T_2^0)\frac{K(\theta)}{\theta},\ T_2^0 \equiv \mathrm{const}, \tag{3}$$

который линейно зависит от температуры $\tau = T_2 - T_2^0$. Наклон этой прямой линии, т.е. производная $\partial k_\upsilon^{(2)}/\partial T_2$, есть нелинейная функция температуры 1-й компоненты. Источник энергии вида (3) является «ведомым», он определяет поведение 2-й компоненты:

$$(T_2)_{tt} = w_2^2(T_2)_{xx} + k_\upsilon^{(2)},\ w_2^2 = \lambda_2/(c_2\gamma_2), \tag{4}$$

причем $w_1^2 = w_2^2 = w^2$. На основе I – IV удается построить новые точные решения системы уравнений (1) – (4), применяя два зависимых друг от друга аргумента типа бегущей волны:

$$\xi = A_* x + B_* t,\ \chi = hx + gt,$$

$$N_\xi = -B_*/A_*,\ N_\chi = -g/h,\ N_\xi N_\chi = w^2;\ g, h - \mathrm{const},$$

где N_χ – скорость перемещения χ-линии. Двухскоростные решения представим в следующей форме.

I–1. $\tau = \theta(\xi)\cos\chi$, $K(\theta) = (w^2h^2 - g^2)\theta + (B_*^2 - w^2A_*^2)Q(\theta)$, (5)

где функции $\theta(\xi)$, $Q(\theta)$ определены решением I.

II–1, III–1, IV–1. $\tau = \theta(\xi)\sin\chi$; функция $K(\theta)$ совпадает по форме записи с (5). Основой этих решений являются, соответственно, зависимости II, III, IV. Таким образом, получаем: вдоль ξ- линии $k_\upsilon^{(1)} \equiv \mathrm{const}$, $k_\upsilon^{(2)} \sim (T_2 - T_2^0)$; вдоль линии $\chi = \mathrm{const}$ источник $k_\upsilon^{(2)}$ есть нелинейная функция температуры ξ-линии. Числа Маха подчинены связи: $\mathrm{M}_\xi^2\mathrm{M}_\chi^2 = 1$, где $\mathrm{M}_\chi^2 = N_\chi^2 / w_2^2$. Значит, в данном классе решений двухскоростной процесс является контрастным: если одна из скоростей дозвуковая, то другая – сверхзвуковая, т.е. $\mathrm{M}_\xi^2 < 1$, $\mathrm{M}_\chi^2 > 1$ либо $\mathrm{M}_\xi^2 > 1$, $\mathrm{M}_\chi^2 < 1$.

Из решений I–1, II–1, III–1, IV–1 следуют примеры точных односкоростных решений, относящиеся к двухкомпонентным системам с источниками $k_\upsilon^{(1)}(\theta)$, $k_\upsilon^{(2)}(\theta,\tau) = \tau K(\theta,\tau)/\theta$ типа «ведущий-ведомый», где

$$K(\theta,\tau) = (B_*^2 - w^2A_*^2)K_1(\theta,\tau).$$

I–1–1. Взяв в решении I–1 $\chi = \xi\sqrt{-m}$, получаем $\tau = \theta(\xi)\cos(\xi\sqrt{-m})$,

$$K_1(\theta) = Q(\theta) + m[\theta + 4\mathrm{sh}(\theta/2)].$$

I–1–2. Если $\chi = 2\xi\sqrt{-m}$, то решение имеет вид: $\tau = \theta(\xi)\cos\left(2\xi\sqrt{-m}\right)$,

$$K_1(\theta,\tau) = 4m\theta + Q(\theta) + 8m\mathrm{sh}(\theta/2)\left[2 + (\tau/\theta)\right].$$

II–1–1. Взяв в решении II–1 $\chi = \xi\sqrt{1-m}$, получаем

$$\tau = \theta(\xi)\sin\left(\xi\sqrt{1-m}\right),\ K_1(\theta) = Q(\theta) + (1-m)\left[4\sin(\theta/2) - \theta\right].$$

II–1–2. Если $2\chi = \xi\sqrt{1-m}$, то решение имеет вид:

$$\tau = \theta(\xi)\sin(\xi\sqrt{1-m}/2),\ K_1(\theta) = Q(\theta) + (1-m)\left[4\sin(\theta/4)A_{11} - (\theta/4)\right],$$

$$A_{11} = \cos(\theta/4) + [m/(1-m)]^{1/2}\sin(\theta/4). \quad (6)$$

III–1–1. Взяв в решении III-1 $\chi = \xi\sqrt{m}$, получаем $\tau = \theta(\xi)\sin(\xi\sqrt{m})$,

$$K_1(\theta) = Q(\theta) - m\left[\theta + 4\sin(\theta/2)\right].$$

III–1–2. Если $2\chi = \xi\sqrt{m}$, то решение имеет вид: $\tau = \theta(\xi)\sin(\xi\sqrt{m}/2)$,

$$K_1(\theta) = Q(\theta) - (m\theta/4) - 4[m(1-m)]^{1/2}\cos(\theta/4)A_{11},$$

где A_{11} подсчитывается по формуле (6).

IV–1–1. Взяв в решении IV–1 $\chi = m\xi$, получаем $\tau = \theta(\xi)\sin(m\xi)$,

$$K_1(\theta) = Q(\theta) - m^2(\theta + 4A_{12}),\ A_{12} = 1 - A_1\exp(-\theta/2).$$

IV–1–2. Если $2\chi = m\xi$, то решение имеет вид: $\tau = \theta(\xi)\sin(m\xi/2)$,

$$K_1(\theta) = Q(\theta) - (m^2/4)\theta - 4\alpha m^2 A_{13},$$

$$A_{13} = \exp(-\theta/2) + [1 - A_1\exp(-\theta/2)](2\alpha)^{-1},$$

где постоянную A_1 следует задавать так, чтобы иметь $\theta(\xi) \neq 0$ в области решения, см. IV.

Возбуждение колебаний и дисперсия волн. Дадим пример физической интерпретации решения I. Нижний индекс 1 (номер компоненты) здесь для краткости не пишем. Рассмотрим волновой процесс при $x \in \lfloor 0, x_j \rfloor$, где $x = 0$ – неподвижная стенка, а правая граница $\xi_j = \pi/(2\sqrt{-m})$, $x_j = (-B_* / A_*)t + (\xi_j / A_*)$ подвижна, ее скорость перемещения определяется нелинейным кинетическим соотношением $N_j = N(T_j)$. Нижним индексом j отмечаем значения функций на правой границе. Согласно I, имеем:

$$u = a\sin(\omega t - kx),\ \omega = B_*\sqrt{-m}\,,\ k = -A_*\sqrt{-m}\,,$$

$$a^2 = (1 - m - g_*^2)/(-m) > 0,\ A_* < 0,\ B_* > 0,\ N = -B_* / A_* > 0,$$

где a – амплитуда колебаний; k – волновое число; ω– круговая частота. Возбуждение колебаний на левой границе происходит по гармоническому закону $u(x = 0, t) = a\sin(\omega t)$, $a = a(\omega)$. Кинетические свойства правой границы определяются экспоненциальной зависимостью ее скорости от температуры: $N_j = N \equiv \mu\exp[r(T_j - T^0)]$; $\mu, r - \mathrm{const}$. Отсюда получаем

$$N = \omega / k = \mu[(1 + u_j)/(1 - u_j)]^{2r},\ u_j = a(\omega)\,.$$

Значит, дисперсионное соотношение между ω и k имеет вид: $k\mu = \omega[(1 - a)/(1 + a)]^{2r}$, где $0 < a(\omega) < 1$ либо $a(\omega) > 1$. Дисперсионные свойства данной системы изучены при следующей корреляции между амплитудой и круговой частотой: $a(\omega) = a_1\exp[-p(\omega - \omega_1)^2]$, где a_1, p, ω_1– положительные и постоянные величины; ω_1– резонансная частота возбуждающих колебаний. Если $0 < a^2 < 1$, то функция $k = k(\omega)$ имеет два экстремума при $\omega = \omega'$, $\omega = \omega''$, и обе эти частоты расположены в субрезонансной области: $0 < \omega' < \omega_1 / 2 < \omega'' < \omega_1$, $(\omega_1/2) - \omega' = \omega'' - (\omega_1 / 2)$. Если $a^2 > 1$, то функция $k(\omega)$ имеет один экстремум, который расположен в сверхрезонансной области: $\omega' > \omega_1$. Детально изучены условия существования нормальной и аномальной дисперсий, а также другие важные закономерности.

[1] O.N. Shablovsky, Crystallography Reports **50**, Suppl. l, 62 (2005).

[2] О.Н. Шабловский, Д.Г. Кроль, Тепловые процессы в технике **2**, 203 (2010)

[3] О.Н. Шабловский, Релаксационный теплоперенос в нелинейных средах, ГГТУ, Гомель (2003).