

## КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ НА ЛИНИИ РОСТА ДЕНДРИТА В ПЕРЕОХЛАЖДЕННОМ РАСПЛАВЕ ЧИСТОГО ВЕЩЕСТВА

О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль

Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого,  
Республика Беларусь, 246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.

E-mail: [shablovsky-on@yandex.ru](mailto:shablovsky-on@yandex.ru)

**Аннотация.** Изучены предвестники морфологической неустойчивости макроскопической формы линии роста дендрита в переохлажденном расплаве.

**Ключевые слова:** кристаллизация, рост дендрита, граница твердое тело–жидкость, морфологический переход.

**Введение.** Проблема роста кристалла из переохлажденного расплава чистого вещества имеет следующий важный аспект: морфологические свойства фронта кристаллизации и возникновение боковых ветвей дендрита. Современное состояние теоретических и экспериментальных исследований дендритообразования представлено в статьях [1–5].

**Цель данной работы:** проанализировать устойчивость / неустойчивость начального состояния дендрита и определить взаимосвязи между пространственно-временными параметрами его вершины.

**Уравнение роста дедрита.** Рассмотрим двухмерный плоский случай. Фазовую границу кристаллизации (ФГК) моделируем плоской линией сильного разрыва  $x - F(y, t) = 0$ . Средняя кривизна этой границы равна  $K = (\partial^2 F / \partial y^2) / G^3$ ,  $G = (1 + (\partial F / \partial y)^2)^{1/2}$ . Здесь координата  $X$  направлена вдоль оси симметрии в сторону твердой фазы;  $y$  – поперечная декартова координата. Для дальнейших рассуждений важное значение имеет угол  $\theta$ , который образует нормаль  $n$  границы с осью  $X$ :  $\cos \theta = 1/G$ . ФГК перемещается со скоростью  $N$  справа налево ( $N = Nn$ ,  $N < 0$ ), и на ее вершине  $\partial F / \partial y = 0$ ,  $\cos \theta = 1$ . Угол заострения линии роста равен  $\theta_1 = (\pi/2) - \theta$ , рисунок 1.

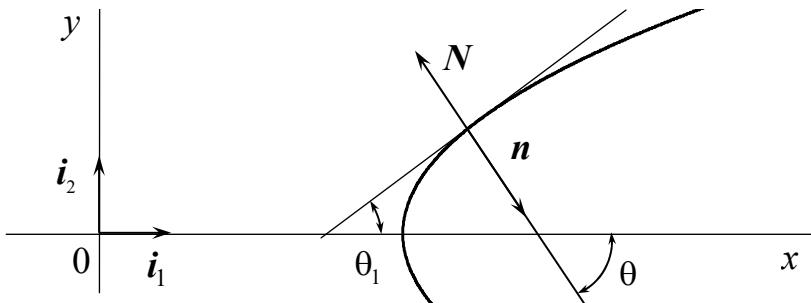


Рис. 1. Угол  $\theta_1$  заострения линии роста

На ФГК имеем следующие три условия.

$$\text{I. Баланс энергии: } q_j = N(c_j T_j - c_* T_*) + NT_c(c_* - c_j) - Q, \quad Q = L \left( N + \gamma_j \frac{\partial N}{\partial t} \right).$$

Здесь звездочкой отмечены параметры расплава перед ФГК; индекс  $j$  указывает, что значение функции определено на правой стороне сильного разрыва, в твердой фазе;  $c$  – объемная теплоемкость;  $q_j$  – нормальная к границе составляющая вектора теплового потока; расплав находится в однородном отрелаксированном состоянии:  $q_* \equiv 0$ ,  $T_* \equiv \text{const}$ .

**II. Известная кинетическая связь**  $|N| = \mu(T_e - T_j)$ ,  $T_e = T_c[1 - (UK/L)]$ , определяющая нормальный механизм роста из расплава. Здесь  $T_e$  – температура равновесия между твердой и жидкой фазами.

**III. Отклонение температуры кристалла**  $T_j$  от равновесного значения  $T_c$  постулируем в следующей форме [6]:  $(T_c - T_j) = (\cos \theta)^\delta B$ ,  $\delta > 0$ , где  $B \equiv \text{const}$  либо  $B = B(t)$ ,  $t \geq 0$ . Параметр  $\delta$  характеризует неоднородность переохлаждения на ФГК. Для аналитических расчетов наиболее удобны целые нечетные значения  $\delta$ . Данная связь означает, что проявления неравновесных свойств температуры  $T_j$  в основном локализованы в окрестности вершины  $\theta = 0$ . Величина  $B = T_c - T_j(\theta = 0)$  – это переохлаждение на вершине дендрита. Чем больше  $\delta$ , тем отчетливее проявляется переход температуры  $T_j$  к равновесному значению  $T_c$ . Изучим вариант  $\delta = 3$  для плоской фазовой границы. Уравнение роста  $N \equiv (\partial F / \partial t) / G = -\mu(T_e - T_j)$  с учетом записанных выше соотношений принимает вид:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \alpha B + \phi(\partial F / \partial t)[1 + (\partial F / \partial y)^2], \quad \alpha = L / (UT_c), \quad \phi = \alpha / \mu. \quad (1)$$

**Возмущенное состояние вершины дендрита.** Построим на основе (1) плоский стационарный контур, скорость перемещения которого не зависит от времени:

$$\begin{aligned} F(y, t) &= A_1 t + A_2(y), \quad A_1 \equiv \text{const} < 0, \\ A_2(y) &= \frac{1}{a^2} \ln \left( \frac{1+E}{2} \right) - \frac{b}{a} y, \quad E = \exp(2aby), \quad \frac{dA_2(y)}{dy} \equiv A(y) = \frac{b(E-1)}{a(E+1)}, \\ a &= (-\phi A_1)^{1/2} > 0, \quad b = (\alpha B + \phi A_1)^{1/2} > 0, \quad -\mu B < A_1 < 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Это решение удовлетворяет условиям на оси симметрии  $y = 0$ :  $A_2 = 0$ ,  $dA_2/dy = 0$ .

Выполнив линеаризацию  $F(y, t) = A_1 t + A_2(y) + f(y, t)$ , где  $f(y, t)$  – малое возмущение стационарного контура, получаем на основе (1), (2) уравнение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \phi \left( 1 + A^2 \right) \frac{\partial f}{\partial t} + 2A_1 \phi A \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Решение строим в виде

$$f(y, t) = [B_2(y) \sin kt + D_2(y) \cos kt] \exp(rt), \quad t \geq 0; \quad r < 0, \quad k \geq 0, \quad y \geq 0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{\phi} \frac{d^2 B_2}{dy^2} = (1 + A^2)(B_2 r - D_2 k) + 2A_1 A \frac{dB_2}{dy}, \quad (4)$$

$$\frac{1}{\phi} \frac{d^2 D_2}{dy^2} = (1 + A^2)(B_2 k + D_2 r) + 2A_1 A \frac{dD_2}{dy}. \quad (5)$$

Начальные условия:  $y = 0, B_2 = B_2^0, D_2 = D_2^0, (dB_2/dy) = B_2^1, (dD_2/dy) = D_2^1$ .

В работе получено аналитическое решение системы (4), (5), позволившее рассмотреть возмущенное состояние (3) в окрестности вершины дендрита. На основе этого решения выполнено вычислительное моделирование колебаний и волн, сопровождающих эволюцию ФГК. Приведем некоторые результаты для никеля.

**Корреляция «частота колебаний - параметр затухания».** Рассмотрим следующие параметры начального состояния возмущенного носика дендрита: возмущение угла заострения  $\delta\theta_1 = (\partial f / \partial y)_{y=0} = D_2^1$ ; возмущение кривизны  $\delta K = (\partial^2 f / \partial y^2)_{y=0} = \phi(kB_2^0 + rD_2^0)$ ; возмущение угловой скорости касательной к линии роста  $\delta\omega = (\partial^2 f / \partial y \partial t)_{y=0} = kB_2^1 + rD_2^1$ ; возмущение углового ускорения касательной к линии роста  $\delta\varepsilon = (\partial^3 f / \partial y \partial t^2)_{y=0} = 2krB_2^1 + (r^2 - k^2)D_2^1$ . На рисунках 2, 3 для никеля на плоскости  $(r, k)$  построены изолинии перечисленных четырех возмущений.

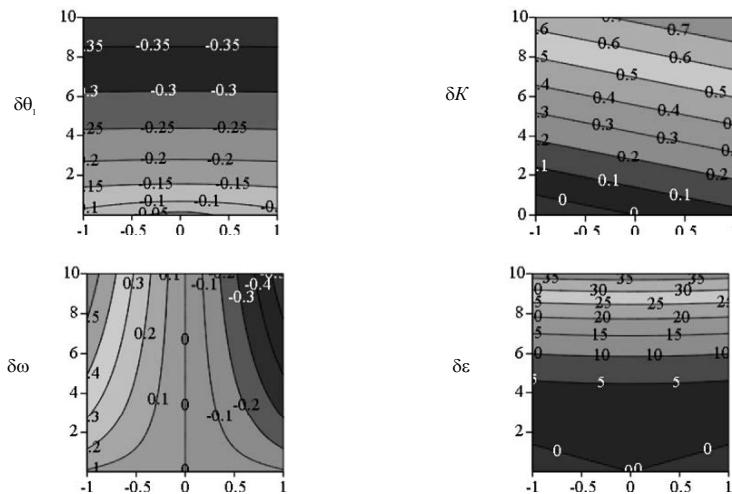


Рис. 2. Никель. Изолинии – на плоскости  $(r, k)$  - параметров начального состояния носика дендрита. Входные параметры:  $\mu = 9,53 \text{ м/(К·с)}$ ,  $N = 5,3 \text{ м/c}$ ,  $\alpha = 6,842 \cdot 10^5 \text{ (K·м)}^{-1}$ ,  $\phi = 7,18 \cdot 10^4 \text{ с/(м}^2)$ ,  $D_2^0 = 0,1$ ,  $B_2^0 = 0,1$

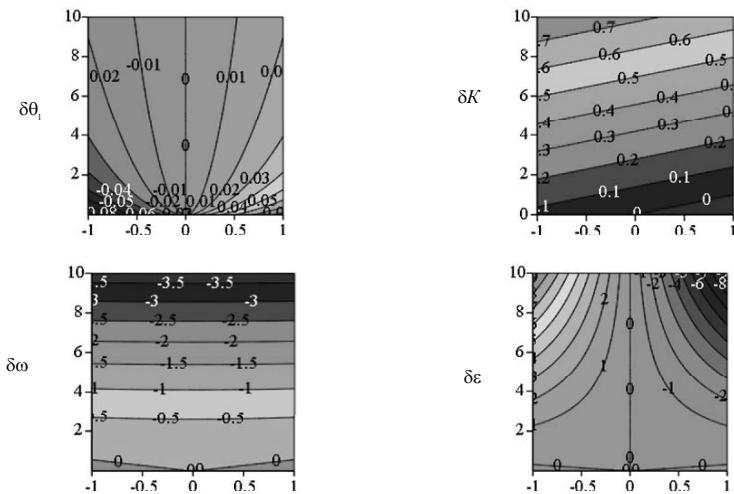
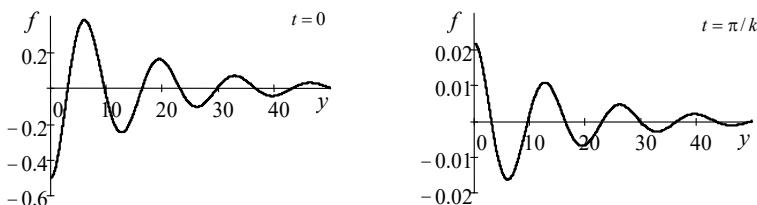


Рис. 3. Никель. Изолинии – на плоскости  $(r, k)$  – параметров начального состояния носика дендрита. Входные параметры:  $\mu = 9,53 \text{ м/(К} \cdot \text{с)}$ ,  $N = 5,3 \text{ м/с}$ ,  
 $\alpha = 6.842 \cdot 10^5 \text{ (К} \cdot \text{м})^{-1}$ ,  $\phi = 7.18 \cdot 10^4 \text{ с/(м}^2)$ ,  $D_2^0 = -0,1$ ,  $B_2^0 = 0,1$

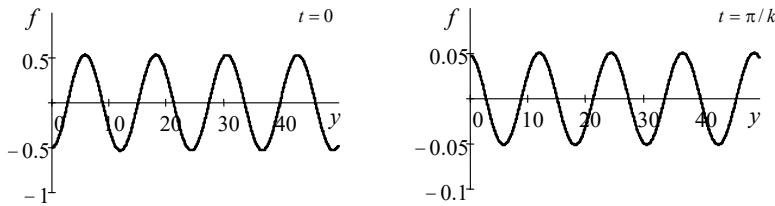
Расчеты выполнены при переохлаждении расплава  $\Delta T = 166 \text{ К}$  при различающихся друг от друга начальных состояниях носика (параметр  $D_2^0$ ). Знак номера изолинии указывает направление эволюции возмущения. Структуры изолиний  $\delta\omega = \text{const}$  и  $\delta\epsilon = \text{const}$  весьма чувствительно реагируют на изменение знака параметра  $D_2^0$ .

**Пространственно-периодическая неоднородность линии роста.** Изучение волнового режима (3)-(5) позволило определить свойства кривизны и скорости линии роста для апериодического и периодического по времени возмущений вершины дендрита, рис.4. При фиксированных значениях параметра затухания  $r$  частота  $k$  колебаний по времени принципиальным образом влияет на характер поведения возмущения  $f(y, t)$  по отношению к координате  $y$ . А именно: наблюдается последовательная смена режимов «периодический процесс затухания» – «гармонические колебания» – «резонансная неустойчивость».

$$\text{A)} r = -0,2, k = 0,2, D_2^0 = -0,5, B_2^0 = 0,5$$



$$\text{Б) } r = -0.2, k = 0.2674, D_2^0 = -0.5, B_2^0 = 0.5$$



$$\text{В) } r = -0.2, k = 0.34, D_2^0 = -0.5, B_2^0 = 0.5$$

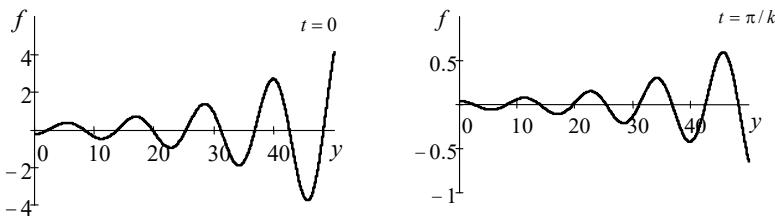


Рис. 4. Никель. Затухающий периодический (А), гармонический (Б) и неустойчивый по резонансному типу (В) режимы возмущения линии роста

**Заключение.** Изучено уравнение роста кристалла, содержащее информацию об отклонении температуры фазовой границы от ее равновесного значения и учитывающее неоднородность переохлаждения вдоль линии роста. Получены соотношения устойчивости начального состояния вершины дендрита, характеризующие взаимосвязь между режимом эволюции во времени линии роста и морфологическими свойствами возмущенной вершины. Вычислены скорости волн возмущения. Представлена структура изолиний параметров начального состояния носика дендрита. На вершине дендрита рассмотрены апериодический и периодический по времени режимы возмущения скорости и кривизны ФГК. Обнаружено, что при росте частоты колебаний по времени происходит последовательная смена режимов возмущения по отношению к поперечной координате: «периодический процесс затухания» – «гармонические колебания» – «неустойчивость по резонансному типу». Даны оценки скорости волн, бегущих вдоль линии роста и возбуждающих боковую ветвь дендрита. Представлены результаты численных расчетов для чистого расплава никеля. Данная работа является продолжением исследования [7, 8].

### Литература

1. Brener, E.A. Pattern selection in two-dimensional dendritic growth / E.A. Brener, V.I. Mel'nikov // Advances in Physics. – 1991. – Vol. 40. – №1. – P. 53–97.
2. Veenendaal, E. Simulation of crystal shape evolution in two dimensions / E. Veenendaal, A.J. Nijdam, J. Suchtelen // Journal of Crystal Growth. – 2002. – Vol. 235. – P. 603–618.

3. Mullis, A.M. Deterministic side-branching during thermal dendritic growth / A.M. Mullis // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2015. – Vol. 84. – 012071. – P. 1–9.
4. Glicksman, M.E. Capillary-mediated interface perturbations: Deterministic pattern formation / M.E. Glicksman // Journal of Crystal Growth. – 2016. – Vol. 450. – P. 119–139.
5. Шабловский, О.Н. Форма поверхности роста и предвестники ветвления дендрита в переохлажденном расплаве / О.Н. Шабловский, Д.Г. Кроль // Успехи прикладной физики. – 2018. – №4. – С. 316–24.
6. Шабловский, О.Н. Морфологические свойства линии роста двумерного дендрита в переохлажденном расплаве / О.Н. Шабловский // Прикладная физика. – 2012. – №4. – С. 40–46.
7. Шабловский, О.Н. Пространственно-временные неоднородности на фазовой границе высокоскоростной кристаллизации переохлажденного расплава / О.Н. Шабловский, Д.Г. Кроль // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2023. – №1. – С. 56–64.
8. Шабловский, О.Н. Параметры возмущенного состояния вершины дендрита в глубоко переохлажденных расплавах никеля и меди / О.Н. Шабловский, Д.Г. Кроль // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2024. – №1. – С. 60–68.