УДК 621.313
DOI 10.62595/1819-5245-2025-3-82-97

МЕТОДИКА РАСЧЕТА МАГНИТНЫХ ПРОВОДИМОСТЕЙ И ПОТОКОВ В БЕСКОЛЛЕКТОРНОМ ДВИГАТЕЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА

А. Б. МЕНЖИНСКИЙ, С. В. ПАНТЕЛЕЕВ, А. Н. МАЛАШИН
Учреждение образования «Военная академия Республики Беларусь», г. Минск

П. Б. МЕНЖИНСКИЙ
Учреждение образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы», Республика Беларусь

Разработана методика определения магнитных проводимостей и основного магнитного потока через катушку обмотки в бесколлекторном двигателе постоянного тока. Отмечено, что особенностью предложенной методики является учет потоков краевого эффекта и рассеяния, а также их зависимости от координаты положения ротора. На основании анализа двухмерной конечно-элементной модели магнитного поля магнитной системы бесколлекторного двигателя постоянного тока предложен подход к определению коэффициентов распределения основного магнитного потока зубца в ярме статора. Получены выражения для расчета коэффициентов рассеяния и краевого эффекта в магнитной системе бесколлекторного двигателя постоянного тока. Выделено, что разработанная методика позволяет решить задачу количественного определения величины основного магнитного потока через катушку обмотки бесколлекторного двигателя постоянного тока с высокой точностью. Указано, что предложенная модель дает возможность определить степень влияния геометрических параметров магнитной цепи на характер изменения основного магнитного потока через катушку обмотки при наименьших временных затратах. Установлено, что разработанная аналитическая модель может быть применима в процессе оптимизации бесколлекторных двигателей постоянного тока.

Ключевые слова: бесколлекторный двигатель, двигатель постоянного тока, методика расчета, магнитный поток, магнитная проводимость.

Для цитирования. Методика расчета магнитных проводимостей и потоков в бесколлекторном двигателе постоянного тока / А. Б. Менжинский, С. В. Пантелеев, А. Н. Малашин, П. Б. Менжинский // Вестник Гомельского государственного технического университета имени П. О. Сухого. – 2025. – № 3 (102). – С. 82–97. – DOI 10.62595/1819-5245-2025-3-82-97

METHODOLOGY FOR CALCULATING MAGNETIC CONDUCTIVITIES AND FLUXES IN A BRUSHLESS DIRECT CURRENT MOTOR

A. B. MENZHINSKY, S. V. PANTELEEV, A. N. MALASHIN
Military Academy of the Republic of Belarus, Minsk

P. B. MENZHINSKY
Yanka Kupala State University of Grodno, the Republic of Belarus

A technique for determining magnetic conductivities and the main magnetic flux through the winding coil in a brushless direct current motor has been developed. It has been noted that the peculiarity of the proposed technique is that it takes into account the edge effect and scattering fluxes, as well as their

dependence on the rotor position coordinate. Based on the analysis of a two-dimensional finite element model of the magnetic field of a brushless direct current motor magnetic system, an approach has been proposed for determining the distribution coefficients of the main magnetic flux of a tooth in the stator yoke. Expressions have been obtained for calculating the scattering coefficients and the edge effect in the magnetic system of a brushless direct current motor. It has been highlighted that the developed technique allows solving the problem of quantitatively determining the value of the main magnetic flux through the winding coil of a brushless direct current motor with high accuracy. It has been indicated that the proposed model makes it possible to determine the degree of influence of the geometric parameters of the magnetic circuit on the nature of the change in the main magnetic flux through the winding coil with the least amount of time. It has been established that the developed analytical model can be applied in the process of optimization of brushless direct current motors.

Keywords: brushless motor, direct current motor, calculation method, magnetic flux, magnetic conductivity.

For citation. Menzhinsky A. B., Panteleev S. V., Malashin A. N., Menzhinsky P. B. Methodology for calculating magnetic conductivities and fluxes in a brushless direct current motor. *Vestnik Gomel'skogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta imeni P. O. Sukhogo*, 2025, no. 3 (102), pp. 82–97 (in Russian). DOI 10.62595/1819-5245-2025-3-82-97

Введение

В настоящее время в качестве перспективных электромеханических преобразователей в диапазоне малых и средних мощностей рассматриваются синхронные электрические машины с постоянными магнитами (СЭМ с ПМ), что объясняется простотой их конструкции, высокой надежностью, достаточно высоким КПД и коэффициентом мощности по сравнению с другими классами электрических машин [1–3].

В этом классе электрических машин выделяют группу синхронных электрических машин с дробными зубцовыми обмотками (СЭМ с ДЗО), которые имеют сниженную удельную массу за счет малой длины лобовых частей обмотки, уменьшенной высоты ярма магнитопровода статора и ротора [3, 4]. На основе таких электрических машин созданы бесколлекторные (бесконтактные) двигатели постоянного тока (БДПТ, англ. – BLDC motor) [5–7]. Бесколлекторный двигатель постоянного тока представляет собой СЭМ с ПМ с противоЭДС трапецеидальной формы при условии ее функционирования в замкнутой системе, содержащей полупроводниковый инвертор (коммутатор) и датчик положения ротора [7–9]. Наличие электронной коммутации в БДПТ обеспечивает их существенное превосходство над коллекторными двигателями постоянного тока. В связи с этим в ходе развития перспективных направлений науки и техники (биоинженерия, робототехника, машиностроение) проявляется повышенный интерес к БДПТ [10].

Для БДПТ характерны многополюсная структура ротора, наличие открытых или полузакрытых пазов магнитопровода статора [3, 4, 11], несинусоидальные законы изменения индукции магнитного поля в воздушном зазоре и пространственных обмоточных функций [4, 12].

Таким образом, особенности конструкции БДПТ обуславливают наличие в магнитной системе повышенных значений краевых магнитных потоков [13, 14] и потоков рассеяния через вершину зубца [12, 15], непосредственно влияющих на величину основного магнитного потока через катушку обмотки. Магнитные потоки рассеяния и краевые магнитные потоки являются причиной дополнительных потерь в БДПТ, поэтому учет их величины при математическом моделировании, электромагнитном расчете и решении задач оптимизации БДПТ весьма важен [16, 17].

Расчет величины основного магнитного потока через катушку обмотки представляет собой один из основных этапов электромагнитного расчета исследуемой электрической машины [11, 16]. Кроме того, наличие достоверной информации о величине упомянутого магнитного потока необходимо для решения задач синтеза систем управления БДПТ. Однако при математическом моделировании и на начальных этапах электромагнитного расчета таких электрических машин авторами научных работ

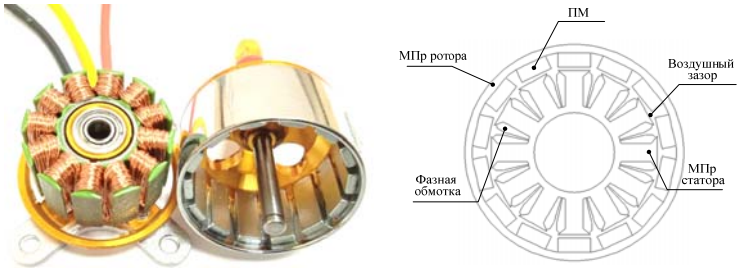
принимаются допущения об отсутствии потоков рассеяния и краевого эффекта, а также о синусоидальном характере распределения функций индукции магнитного поля в воздушном зазоре и ЭДС – в обмотке [4, 12, 18–20]. Также исследователями не учитывается зависимость величины потоков рассеяния и краевого эффекта от координаты положения ротора [4, 12–14]. Применение таких допущений ведет к увеличению погрешности расчетов электромагнитных величин БДПТ.

Стоит отметить, что в [21, 22] разработаны аналитические модели для определения основного магнитного потока через катушку обмотки и магнитного потока рассеяния через зубцы статора СЭМ с ДЗО. Упомянутые модели составляют основу разрабатываемой методики расчета магнитных проводимостей и потоков в БДПТ. Вместе с тем в предложенных моделях не представлены расчетные выражения полезной магнитной проводимости с учетом потоков краевого эффекта и координаты положения ротора, а также основного магнитного потока через катушку обмотки с учетом этих проводимостей.

Цель настоящей работы – разработка методики для определения магнитных проводимостей и основного магнитного потока через катушку обмотки в БДПТ с учетом наличия потоков краевого эффекта и рассеяния, а также их зависимости от координаты положения ротора.

Разработка методики расчета

На рис. 1 приведены внешний вид и магнитная система трехфазного ($m_ф = 3$) БДПТ с количеством пар полюсов $p = 7$, количеством зубцов магнитопровода (МПр) статора $z_1 = 12$ и числом зубцов на полюс и фазу $q = z_1 / 2pm_ф = 2/7$.



а) *б*)

Рис. 1. Внешний вид (*а*) и магнитная система (*б*) исследуемого трехфазного БДПТ

На рис. 2 представлены схемы линейной развертки электромагнитной системы и трехфазной обмотки исследуемого БДПТ [22].

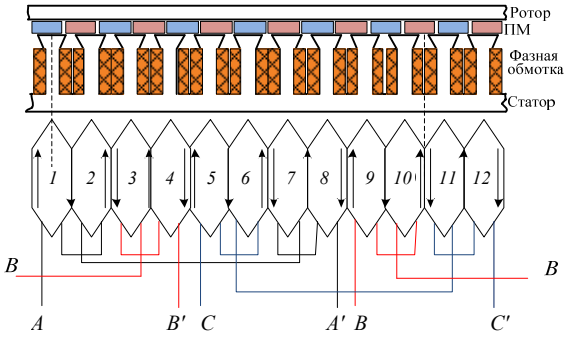
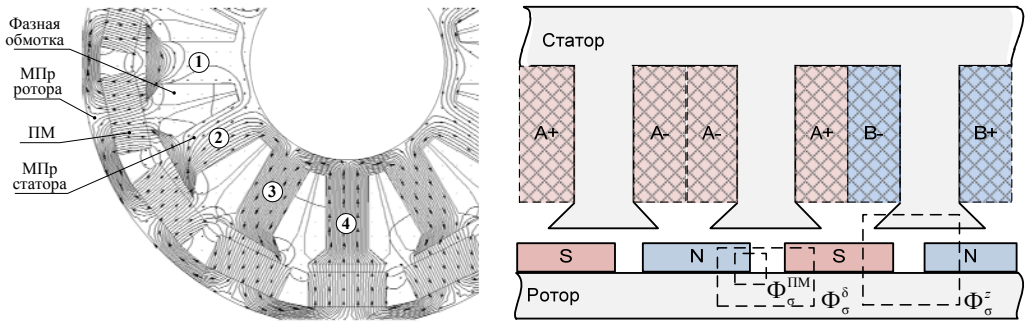


Рис. 2. Схема линейной развертки электромагнитной системы и схема обмотки исследуемого БДПТ

Для аналитического представления магнитного потока через катушку обмотки БДПТ целесообразно использовать эквивалентную схему замещения магнитной цепи электрической машины, построенной с учетом наиболее вероятных путей распространения магнитных потоков в магнитной системе. Достоинство такого метода заключается в установлении аналитических связей между величиной магнитных потоков и геометрическими параметрами магнитной системы электрической машины, а также свойствами материалов, что является одним из необходимых условий для процесса ее оптимизации [23–25].

Построение эквивалентной схемы магнитной цепи и расчет основного магнитного потока через катушку обмотки БДПТ. Для корректного определения типовых магнитных потоков в магнитной системе БДПТ при построении эквивалентной схемы его магнитной цепи необходимо исследовать двумерную конечно-элементную модель (ДКЭМ) магнитного поля (МП) магнитной системы БДПТ [26, 27].

На рис. 3, *а* приведена ДКЭМ МП магнитной системы исследуемого БДПТ в режиме холостого хода [22]. Области магнитной системы, которые определяют четыре типовых случая относительного положения полюса ротора и зубца статора, обозначены цифрами [1…4].



а) *б*)

Рис. 3. Магнитное поле в магнитной системе исследуемого БДПТ:
а – двухмерная конечно-элементная модель магнитного поля
магнитной системы в режиме холостого хода; *б* – магнитные потоки рассеяния

Анализ ДКЭМ МП магнитной системы БДПТ показал, что в магнитной системе существуют различные типы потоков рассеяния, величины которых существенным образом влияют на расчет основного магнитного потока через катушку обмотки аналитическим методом: $\Phi_\sigma^{ПМ}$ – поток рассеяния на конце ПМ; Φ_σ^{δ} – поток межполюсного рассеяния; Φ_σ^{z} – поток рассеяния через зубец [21, 22]. Упомянутые потоки рассеяния в БДПТ даны на рис. 3, *б*. Магнитные потоки межполюсного рассеяния и рассеяния на конце ПМ не зависят от координаты положения ротора, а магнитный поток рассеяния через зубец Φ_σ^{z} зависит. При этом функция изменения мгновенных значений магнитного потока рассеяния через зубец Φ_σ^{z} является периодически изменяющейся.

Для определения величины периода изменения упомянутой функции используется рис. 4. Показано (рис. 4, *а*), что в качестве начала отсчета $(x = 0)$ используется положение статора и ротора, при котором ось m-го зубца статора совпадает с осью q магнитного полюса. В этом положении поток рассеяния Φ_σ^{z} является максимальным, а ширина ПМ, обращенная к зубцу статора, равна $\Delta x = (b_s + b_{ПМ} - \tau)/2$, где b_s, $b_{ПМ}$ и τ – шаг зубцов статора, ширина ПМ, шаг полюсов соответственно.

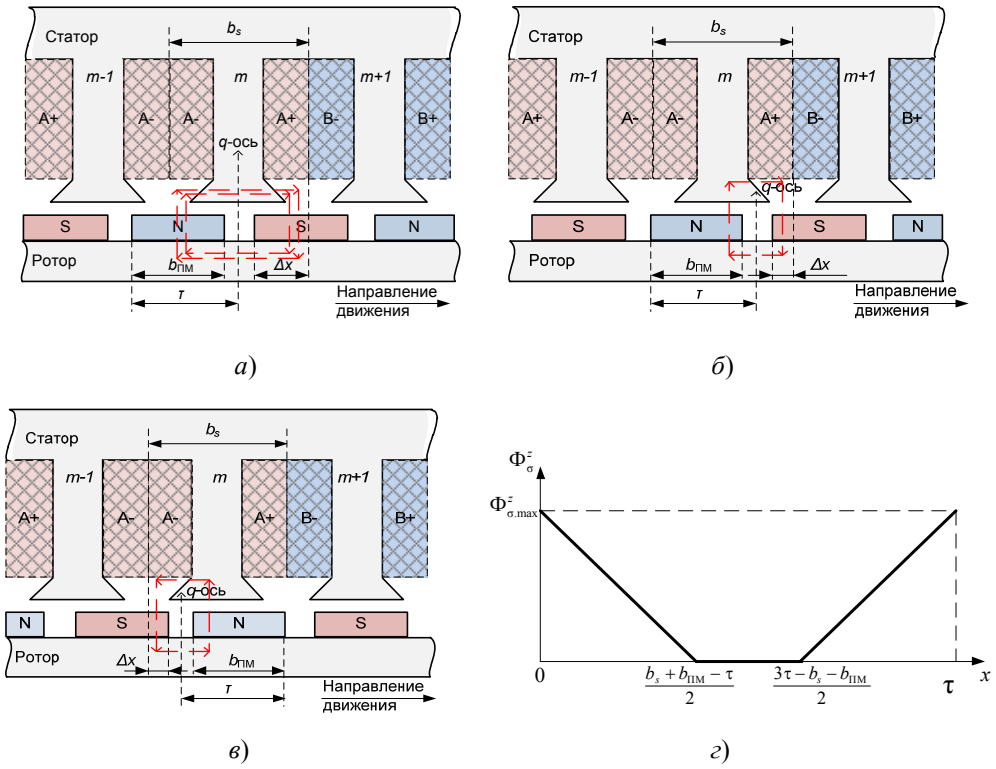


Рис. 4. К вопросу определения величины периода функции изменения мгновенных значений магнитного потока рассеяния через зубец:
а – строго рассогласованное состояние (область [1] – на рис. 3, *а*);
б – частично рассогласованное состояние (область [2] – на рис. 3, *а*);
в – частично согласованное состояние (область [3] – на рис. 3, *а*);
г – функция изменения магнитного потока рассеяния через зубец

Как видно на рис. 4, *б*, ротор продолжает движение. Ширина ПМ, обращенная к зубцу статора Δx, постепенно уменьшается. Когда интервал движения достигнет величины $x = (b_s + b_m - \tau)/2$, поток рассеяния от полюса *N* больше не войдет в вершину *m*-го зубца статора, а его величина станет минимальной и будет стремиться к нулю.

Когда интервал движения превысит величину $x \geq (b_s + b_m - \tau)/2$, то *m*-й зубец статора перемещается в область следующего постоянного магнита, что ясно из рис. 4, *в*. При этом поток рассеяния через вершину зубца увеличивается.

Таким образом, в процессе движения ротора с увеличением *x* поток рассеяния через вершину *m*-го зубца изменяется линейно и периодически. Функция изменения характеризуется симметрией в области пары полюсов, что продемонстрировано на рис. 4, *г*.

Ограничив перечень учитываемых в модели магнитных потоков, представляется возможным составить эквивалентную схему магнитной цепи БДПТ. Для области [2…4] магнитной системы исследуемого БДПТ может быть поставлена в соответствие эквивалентная схема магнитной цепи, представленная на рис. 5. При построении эквивалентной схемы магнитной цепи БДПТ был принят ряд традиционных допущений: потери в МПр от вихревых токов и магнитное сопротивление МПр не учитываются; ПМ стабилизирован, положение рабочей точки ПМ в процессе работы не меняется; МПр не насыщен, магнитные потоки рассеяния на конце ПМ не учитываются [16, 17, 23].

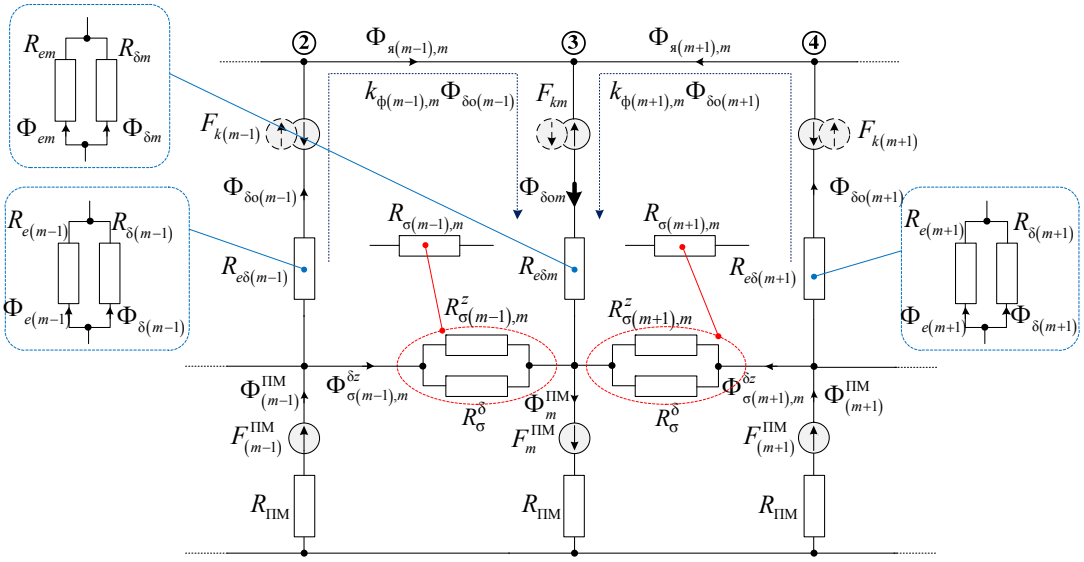


Рис. 5. Эквивалентная схема магнитной цепи для областей [2…4] исследуемого БДПТ

На рис. 5 обозначено: $R_{e(m-1)}$, R_{em} и $R_{e(m+1)}$ – магнитные сопротивления воздушных участков по путям потоков краевого эффекта; $R_{\delta(m-1)}$, $R_{\delta m}$ и $R_{\delta(m+1)}$ – магнитные сопротивления воздушных зазоров между полюсами статора и ротора; $R_{e\delta(m-1)}$, $R_{e\delta m}$, $R_{e\delta(m+1)}$ – магнитные сопротивления воздушных участков по путям основного магнитного потока $\Phi_{\delta o(m-1)}=\Phi_{\delta(m-1)}+\Phi_{e(m-1)}$, $\Phi_{\delta om}=\Phi_{\delta m}+\Phi_{em}$ и $\Phi_{\delta o(m+1)}=\Phi_{\delta(m+1)}+\Phi_{e(m+1)}$ соответственно; R_{σ}^{δ} – магнитные сопротивления воздушных участков по путям потоков межполюсного рассеяния; $R_{\sigma(m-1),m}^{z}$, $R_{\sigma(m+1),m}^{z}$ – магнитные сопротивления воздушных участков по путям потоков рассеяния через зубец; $R_{\sigma(m-1),m}=R_{\sigma}^{\delta}R_{\sigma(m-1),m}^{z}\big/\left(R_{\sigma}^{\delta}+R_{\sigma(m-1),m}^{z}\right)$ и $R_{\sigma(m+1),m}=R_{\sigma}^{\delta}R_{\sigma(m+1),m}^{z}\big/\left(R_{\sigma}^{\delta}+R_{\sigma(m+1),m}^{z}\right)$ – полные магнитные сопротивления по путям потоков рассеяния $\Phi_{\sigma(m-1),m}^{\delta z}=\Phi_{\sigma}^{\delta}+\Phi_{\sigma(m-1),m}^{z}$ и $\Phi_{\sigma(m+1),m}^{\delta z}=\Phi_{\sigma}^{\delta}+\Phi_{\sigma(m+1),m}^{z}$ соответственно; $F_{(m-1)}^{\text{ПМ}}$, $F_{m}^{\text{ПМ}}$, $F_{(m+1)}^{\text{ПМ}}$ – МДС ПМ; $R_{\text{ПМ}}$ – магнитное сопротивление ПМ; $\Phi_{(m-1)}^{\text{ПМ}}$, $\Phi_{m}^{\text{ПМ}}$, $\Phi_{(m+1)}^{\text{ПМ}}$ – магнитный поток ПМ; $F_{k(m-1)}$, F_{km}, $F_{k(m+1)}$ – магнитодвижущая сила (МДС) катушки обмотки; $\Phi_{\text{я}(m\mp1),m}$ – магнитной поток в ярме статора; $k_{\text{ф}(m-1),m}=\Phi_{\text{я}(m-1),m}\big/\Phi_{\delta o(m-1)}$ и $k_{\text{ф}(m+1),m}=\Phi_{\text{я}(m+1),m}\big/\Phi_{\delta o(m+1)}$ – коэффициенты распределения основного магнитного потока зубца в ярме статора. Индексы $m-1$, m и $m+1$ относятся к левому, центральному и правому ПМ (зубцу, катушке обмотки) соответственно.

Магнитные сопротивления $R_{e(m-1)}$, R_{em}, $R_{e(m+1)}$, $R_{\delta(m-1)}$, $R_{\delta m}$, $R_{\delta(m+1)}$, $R_{e\delta(m-1)}$, $R_{e\delta m}$, $R_{e\delta(m+1)}$, $R_{\sigma(m-1),m}^{z}$, $R_{\sigma(m+1),m}^{z}$ зависят от координаты положения ротора.

Значение коэффициента распределения основного магнитного потока зубца в ярме статора можно определить посредством ДКЭМ МП и выражения (1):

$$k_{\text{ф}(m-1),m}=\Phi_{\text{я}(m-1),m}\big/\Phi_{\delta o(m-1)};\quad k_{\text{ф}(m+1),m}=\Phi_{\text{я}(m+1),m}\big/\Phi_{\delta o(m+1)}. \qquad (1)$$

Например, на рис. 6 показана ДКЭМ МП исследуемого БДПТ и области расчета магнитных потоков $\Phi_{я(m\pm1),m}$, $\Phi_{δo(m\pm1)}$, по величинам которых рассчитываются (1) коэффициенты распределения основного магнитного потока зубца в ярме статора для [2] и [4] областей магнитной системы при замыкании их через [3] область. Для остальных областей магнитной системы порядок определения данного коэффициента аналогичен.

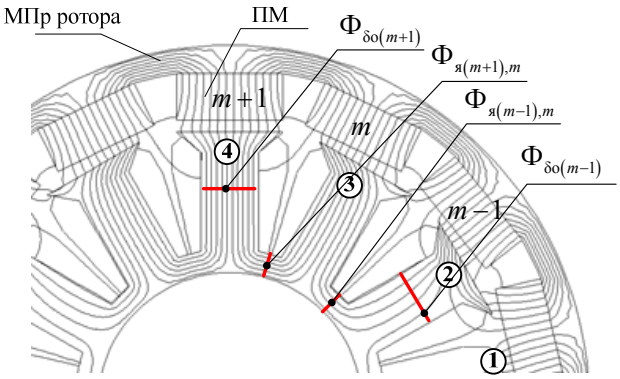


Рис. 6. К вопросу расчета коэффициента распределения основного магнитного потока зубца в ярме статора:
— область расчета магнитных потоков

Для *левой* и *правой частей* эквивалентной магнитной цепи БДПТ (рис. 5), применив законы Кирхгофа для магнитной цепи, соответственно запишем [21]:

$$\begin{cases} F^{ПМ}_{(m-1)} + F^{ПМ}_{m} = R_{ПМ}\left(\Phi^{ПМ}_{(m-1)} + \Phi^{ПМ}_{m}\right) + R_{σ(m-1),m}\Phi^{δz}_{σ(m-1),m}; \\ \left(F^{ПМ}_{(m-1)} + F^{ПМ}_{m}\right) \mp F_{k(m-1)} \mp F_{km} = R_{ПМ}\left(\Phi^{ПМ}_{(m-1)} + \Phi^{ПМ}_{m}\right) + \Phi_{δo(m-1)}\left(R_{eδ(m-1)} + k_{ф(m-1),m}R_{eδm}\right); \\ \Phi_{δo(m-1)} = \Phi^{ПМ}_{(m-1)} - \Phi^{δz}_{σ(m-1),m}; \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} F^{ПМ}_{(m+1)} + F^{ПМ}_{m} = R_{ПМ}\left(\Phi^{ПМ}_{(m+1)} + \Phi^{ПМ}_{m}\right) + R_{σ(m+1),m}\Phi^{δz}_{σ(m+1),m}; \\ \left(F^{ПМ}_{(m+1)} + F^{ПМ}_{m}\right) \mp F_{k(m+1)} \mp F_{km} = R_{ПМ}\left(\Phi^{ПМ}_{(m+1)} + \Phi^{ПМ}_{m}\right) + \Phi_{δo(m+1)}\left(R_{eδ(m+1)} + k_{ф(m+1),m}R_{eδm}\right); \\ \Phi_{δo(m+1)} = \Phi^{ПМ}_{(m+1)} - \Phi^{δz}_{σ(m+1),m}. \end{cases} \quad (3)$$

Представив магнитные сопротивления через обратные им величины – магнитные проводимости, и учитывая, что МДС всех ПМ одинаковы $F^{ПМ}_{(m-1)} = F^{ПМ}_{m} = F^{ПМ}_{(m+1)} = F^{ПМ}$, ток в катушках фазной обмотки создает одинаковую МДС $F_{k(m-1)} = F_{km} = F_{k(m+1)} = F_k$, а также $\Phi^{ПМ} = F^{ПМ}/R_o$, где R_o – суммарное внешнее магнитное сопротивление по путям основного магнитного потока с учетом краевого,и потоков рассеяния, решение систем уравнений (2) и (3) относительно $\Phi_{δo(m-1)}$ и $\Phi_{δo(m+1)}$ имеет вид:

$$\Phi_{δo(m-1)} = \frac{F^{ПМ}\left(G_{eδ(m-1)}G^{-1}_{σ(m-1),m} + 1\right) \mp 2F_k}{G^{-1}_{σ(m-1),m} + k_{ф(m-1),m}G^{-1}_{eδm} + G^{-1}_{eδ(m-1)}}; \quad (4)$$

$$\Phi_{δo(m+1)} = \frac{F^{ПМ}\left(G_{eδ(m+1)}G^{-1}_{σ(m+1),m} + 1\right) \mp 2F_k}{G^{-1}_{σ(m+1),m} + k_{ф(m+1),m}G^{-1}_{eδm} + G^{-1}_{eδ(m+1)}}. \quad (5)$$

Согласно рис. 5, основной магнитной поток через m-ю катушку обмотки БДПТ равен:

$$\Phi_{\delta om}=\frac{k_{\phi(m-1),m}G_{\sigma(m-1),m}G_{e\delta m}G_{e\delta(m-1)}\left(F^{\text{ПМ}}\left(G_{e\delta(m-1)}G^{-1}_{\sigma(m-1),m}+1\right)\mp 2F_k\right)}{G_{e\delta m}G_{e\delta(m-1)}+k_{\phi(m-1),m}G_{\sigma(m-1),m}G_{e\delta(m-1)}+G_{\sigma(m-1),m}G_{e\delta m}}+$$

$$+\frac{k_{\phi(m+1),m}G_{\sigma(m+1),m}G_{e\delta m}G_{e\delta(m+1)}\left(F^{\text{ПМ}}\left(G_{e\delta(m+1)}G^{-1}_{\sigma(m+1),m}+1\right)\mp 2F_k\right)}{G_{e\delta m}G_{e\delta(m+1)}+k_{\phi(m+1),m}G_{\sigma(m+1),m}G_{e\delta(m+1)}+G_{\sigma(m+1),m}G_{e\delta m}}. \qquad (6)$$

Выражение (6) позволяет учесть наличие потоков краевого эффекта и рассеяния через зубцы статора при расчете основного магнитного потока через катушку обмотки БДПТ. Зависимость исследуемых магнитных потоков от координаты положения ротора устанавливается в результате расчета магнитных проводимостей участков магнитной системы.

Расчет магнитных проводимостей. Расчет полных магнитных проводимостей по путям магнитного потока рассеяния $G_{\sigma(m-1),m}=G^{z}_{\sigma(m-1),m}+G^{\delta}_{\sigma}$, $G_{\sigma(m+1),m}=G^{z}_{\sigma(m+1),m}+G^{\delta}_{\sigma}$ и основного магнитного потока $G_{e\delta(m-1)}=G_{e(m-1)}+G_{\delta(m-1)}$, $G_{e\delta m}=G_{em}+G_{\delta m}$, $G_{e\delta(m+1)}=G_{e(m+1)}+G_{\delta(m+1)}$ при различных положениях зубцов статора относительно полюсов ротора выполняется аналитическим методом с использованием элементарных магнитных проводимостей [23]. Для этого используется рис. 7, на котором представлена структура областей [1…4] магнитной системы БДПТ с обозначением элементарных магнитных проводимостей воздушных промежутков по путям магнитного потока рассеяния и основного магнитного потока.

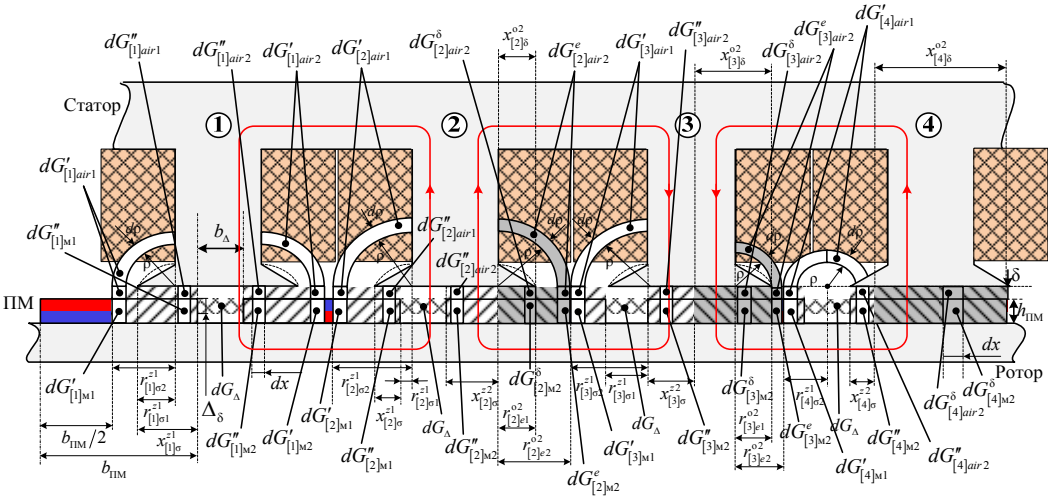


Рис. 7. Структура областей [1…4] магнитной системы БДПТ с обозначением элементарных магнитных проводимостей

На рис. 7 обозначены: $dG'_{[1...4]м1(2)}$ и $dG''_{[1...4]м1(2)}$ – элементарные магнитные проводимости **рассеяния** участков ПМ по пути потоков краевого эффекта и воздушного зазора соответственно; $dG'_{[1...4]air1(2)}$ и $dG''_{[1...4]air1(2)}$ – элементарные магнитные проводимости **рассеяния** участков воздуха по пути потоков краевого эффекта и воздушного зазора соответственно; $dG^{\delta}_{[2...4]м2}$ – элементарные магнитные проводимости участков ПМ по пути основного магнитного потока через воздушный зазор; $dG^{\delta}_{[2...4]air2}$ –

элементарные магнитные проводимости участков воздуха по пути основного магнитного потока через воздушный зазор; $dG^{e}_{[2(3)]\text{м}2}$ – элементарные магнитные проводимости участков ПМ по пути основного магнитного потока краевого эффекта; $dG^{e}_{[2(3)]air2}$ – элементарные магнитные проводимости участков воздуха по пути основного магнитного потока краевого эффекта; dG_{Δ} – элементарная магнитная проводимость рассеяния межполюсного участка; $b_{\text{ПМ}}$ – ширина ПМ, м; b_{Δ} – ширина межполюсного участка, м; Δ_{δ} – высота межполюсного участка, ограничивающая зону потока рассеяния, м; $h_{\text{ПМ}}$ – толщина ПМ, м; δ – величина воздушного зазора, м; $r^{z1(2)}_{[1\ldots4]\sigma1}$, $r^{z1(2)}_{[1\ldots4]\sigma2}$ – внутренний и наружный радиусы, ограничивающие зону потоков рассеяния через зубец, м; $r^{o2}_{[2(3)]e1}$, $r^{o2}_{[2(3)]e2}$ – внутренний и наружный радиусы, ограничивающие зону основного магнитного потока краевого эффекта, м; $x^{z1(2)}_{[1\ldots4]\sigma}$ – ширина части ПМ, находящегося в зоне потока рассеяния через зубец, м; $x^{o2}_{[2\ldots4]\delta}$ – ширина части ПМ, находящегося в зоне основного магнитного потока, м.

Величины радиусов $r^{z1(2)}_{[1\ldots4]\sigma1}$, $r^{z1(2)}_{[1\ldots4]\sigma2}$, $r^{o2}_{[2(3)]e1}$, $r^{o2}_{[2(3)]e2}$ и ширины $x^{z1(2)}_{[1\ldots4]\sigma}$, $x^{o2}_{[2\ldots4]\delta}$ зависят от координаты положения ротора. Индексы *1* и *2* относятся к левому и правому ПМ соответственно в каждой области магнитной системы [1…4].

Элементарные проводимости бесконечно тонкого слоя $d\rho$ или dx по путям магнитных потоков рассеяния через зубец статора и основного магнитного потока состоят из двух последовательно соединенных участков: участок воздуха и ПМ [23]. Элементарная проводимость рассеяния межполюсного интервала является проводимостью только участка воздуха.

Полагаем, что элементарные магнитные проводимости воздуха по пути магнитного потока рассеяния и основного магнитного потока представляются в виде тонких слоев $d\rho$, ограниченных дугами окружностей радиуса ρ, сопряженных с небольшими прямолинейными участками, а в зоне воздушного зазора между статором и ротором, ПМ и межполюсного интервала – только прямолинейными участками dx и $d\Delta_{\delta}$ соответственно [23].

Расчет полных магнитных проводимостей по путям магнитного потока рассеяния. В [21, 22] подробным образом представлены выводы выражений полных магнитных проводимостей рассеяния для каждой области магнитной системы [1…4]:

• для области [1]

$$G_{[1]\sigma}=\frac{\mu_0 l\left(\ln\left(\frac{g+r^{z1}_{[1]\sigma2}}{g+r^{z1}_{[1]\sigma1}}\right)+\frac{x^{z1}_{[1]\sigma}}{g}\right)\left(\ln\left(\frac{g+r^{z2}_{[1]\sigma2}}{g+r^{z2}_{[1]\sigma1}}\right)+\frac{x^{z2}_{[1]\sigma}}{g}\right)}{0{,}5\pi\left(\ln\left(\frac{g+r^{z1}_{[1]\sigma2}}{g+r^{z1}_{[1]\sigma1}}\right)+\ln\left(\frac{g+r^{z2}_{[1]\sigma2}}{g+r^{z2}_{[1]\sigma1}}\right)+\frac{x^{z2}_{[1]\sigma}+x^{z1}_{[1]\sigma}}{g}\right)}+\frac{\mu_0\Delta_{\delta}l}{b_{\Delta}};\qquad(7)$$

• для области [2]

$$G_{[2]\sigma}=\frac{\mu_0 l x^{z2}_{[2]\sigma}\left(\ln\left(\frac{g+r^{z1}_{[2]\sigma2}}{g+r^{z1}_{[2]\sigma1}}\right)+\frac{x^{z1}_{[2]\sigma}}{g}\right)}{0{,}5g\pi\left(\ln\left(\frac{g+r^{z1}_{[2]\sigma2}}{g+r^{z1}_{[2]\sigma1}}\right)+\frac{x^{z2}_{[2]\sigma}+x^{z1}_{[2]\sigma}}{g}\right)}+\frac{\mu_0\Delta_{\delta}l}{b_{\Delta}};\qquad(8)$$

• для области [3]

$$G_{[3]\sigma}=\frac{\mu_0 l\Delta_\delta\left(\ln\left(\frac{g+r^{z1}_{[3]\sigma 2}}{g+r^{z1}_{[3]\sigma 1}}\right)\left(\frac{2x^{z2}_{[3]\sigma}b_\Delta}{\pi\Delta_\delta}+g\right)+x^{z2}_{[3]\sigma}\right)}{gb_\Delta\ln\left(\frac{g+r^{z1}_{[3]\sigma 2}}{g+r^{z1}_{[3]\sigma 1}}\right)+b_\Delta x^{z2}_{[3]\sigma}};\qquad(9)$$

• для области [4]

$$G_{[4]\sigma}=\frac{\mu_0 l\Delta_\delta\left(\ln\left(1+\frac{2r^{z1}_{[4]\sigma 2}}{g}\right)\left(\frac{b_\Delta x^{z2}_{[4]\sigma}}{\pi\Delta_\delta}+0,5g\right)+x^{z2}_{[4]\sigma}\right)}{0,5gb_\Delta\ln\left(1+2g^{-1}r^{z1}_{[4]\sigma 2}\right)+b_\Delta x^{z2}_{[4]\sigma}},\qquad(10)$$

где μ_r – внутренняя проницаемость ПМ, Гн/м; l – длина ПМ в направлении, перпендикулярном плоскости рис. 7 (эффективная длина), м; μ_0 – абсолютная магнитная проницаемость вакуума, Гн/м; $g=2\pi^{-1}\left(\mu_0\mu_r^{-1}h_{\text{ПМ}}+\delta\right)$ – коэффициент.

Расчет полной магнитной проводимости по путям основного магнитного потока. Для того чтобы получить выражения упомянутых магнитных проводимостей для каждой области магнитной системы [1…4], воспользуемся подходом, представленным в [23]. На рис. 7 показана эквивалентная схема магнитной цепи для расчета полной магнитной проводимости по путям основного магнитного потока, соответствующая области [2…4] магнитной системы БДПТ.

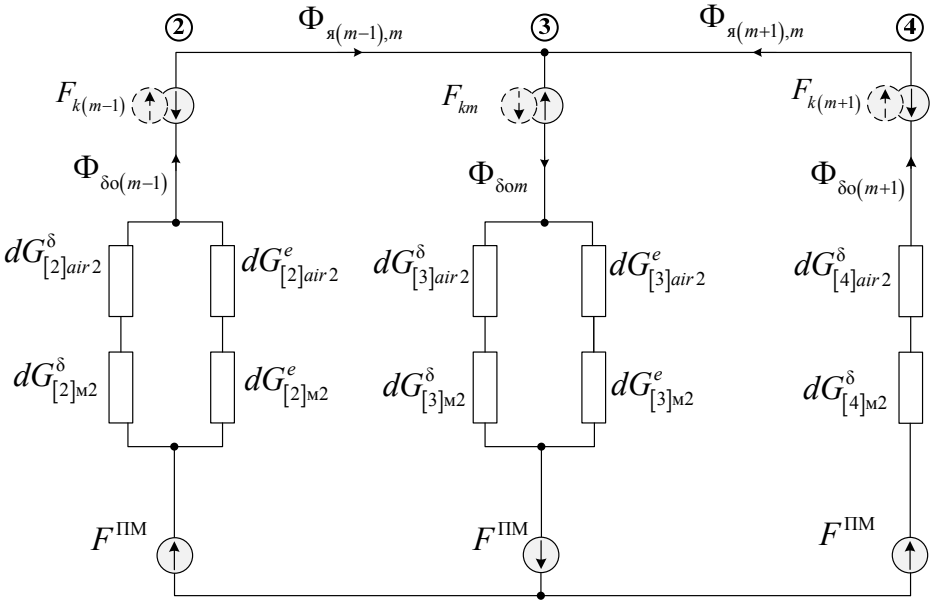


Рис. 8. Эквивалентная схема магнитной цепи БДПТ для расчета полной магнитной проводимости по путям основного магнитного потока в области [2…4]

Используя рис. 8, записываются выражения для определения полных элементарных магнитных проводимостей по путям основного магнитного потока для области магнитной системы [2…4]:

$$dG_{[2]e\delta} = dG^{\delta}_{[2]\text{м}2}dG^{\delta}_{[2]air2}\left(dG^{\delta}_{[2]\text{м}2} + dG^{\delta}_{[2]air2}\right)^{-1} + dG^{e}_{[2]\text{м}2}dG^{e}_{[2]air2}\left(dG^{e}_{[2]\text{м}2} + dG^{e}_{[2]air2}\right)^{-1}; \quad (11)$$

$$dG_{[3]e\delta} = dG^{\delta}_{[3]\text{м}2}dG^{\delta}_{[3]air2}\left(dG^{\delta}_{[3]\text{м}2} + dG^{\delta}_{[3]air2}\right)^{-1} + dG^{e}_{[3]\text{м}2}dG^{e}_{[3]air2}\left(dG^{e}_{[3]\text{м}2} + dG^{e}_{[3]air2}\right)^{-1}; \quad (12)$$

$$dG_{[4]e\delta} = dG^{\delta}_{[4]\text{м}2}dG^{\delta}_{[4]air2}\left(dG^{\delta}_{[4]\text{м}2} + dG^{\delta}_{[4]air2}\right)^{-1}. \quad (13)$$

Путем определения каждой элементарной магнитной проводимости и последующего интегрирования получаем выражения для расчета полных магнитных проводимостей по путям основного магнитного потока:

$$G_{[2]e\delta} = \frac{\mu_0 l x^{\text{o}2}_{[2]\delta}}{\mu_0\mu_r^{-1}h_{\text{м}} + \delta} + \frac{\mu_0 l}{0{,}5\pi}\ln\left(\frac{g + r^{\text{o}2}_{[2]e2}}{g + r^{\text{o}2}_{[2]e1}}\right); \quad (14)$$

$$G_{[3]e\delta} = \frac{\mu_0 l x^{\text{o}2}_{[3]\delta}}{\mu_0\mu_r^{-1}h_{\text{м}} + \delta} + \frac{\mu_0 l}{0{,}5\pi}\ln\left(\frac{g + r^{\text{o}2}_{[3]e2}}{g + r^{\text{o}2}_{[3]e1}}\right); \quad (15)$$

$$G_{[4]e\delta} = \frac{\mu_0 l x^{\text{o}2}_{[4]\delta}}{\mu_0\mu_r^{-1}h_{\text{м}} + \delta}. \quad (16)$$

Из рис. 4 следует, что основной магнитный поток вдоль одного контура магнитной цепи пересекает воздушный зазор 2 раза. При этом взаимные положения соседних ($n \pm 1$), n зубцов статора и полюсов ротора могут соответствовать следующим смежным областям магнитной системы (рис. 3, *а*): [1] и [2] (3); [2] и [3]; [3] (2) и [4]. Соответственно полная магнитная проводимость воздушных промежутков по путям основного магнитного потока на пару полюсов определяется выражением:

$$G_{e\delta} = G_{e\delta m}G_{e\delta(m\pm1)}\left(G_{e\delta m} + G_{e\delta(m\pm1)}\right)^{-1}. \quad (17)$$

При решении задачи электромагнитного расчета БДПТ магнитные потоки рассеяния и краевого эффекта целесообразно учитывать посредством коэффициентов σ и k_e соответственно [23]:

$$\sigma_{[1\ldots4]} = 1 + G_{[1\ldots4]\sigma}G^{-1}_{[1\ldots4]e\delta}; \quad (18)$$

$$k_{[2\ldots4]e} = G_{[2\ldots4]e\delta}G^{-1}_{[2\ldots4]\delta}. \quad (19)$$

Последовательность применения методики для определения магнитных проводимостей и основного магнитного потока через m-ю катушку обмотки БДПТ показана на рис. 9.

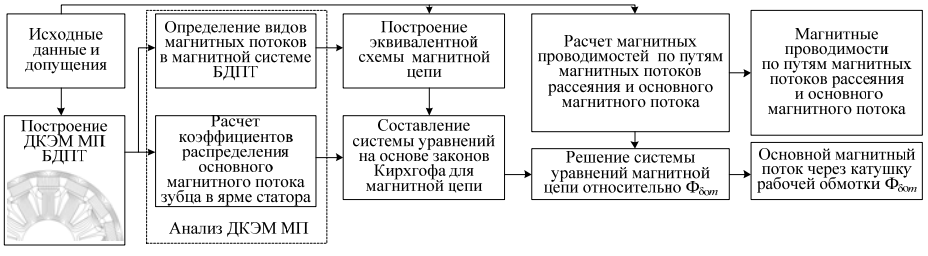


Рис. 9. Последовательность применения методики для определения магнитных проводимостей и основного магнитного потока через катушку обмотки БДПТ

Достоверность результатов расчета, полученных путем применения разработанной методики для определения магнитных проводимостей и основного магнитного потока через обмотку, существенно зависит от корректного анализа ДКЭМ МП магнитной системы электрической машины.

Результаты применения методики

Проверку точности расчета величин основного магнитного потока через катушку обмотки БДПТ посредством разработанной методики корректно проводить в сравнении с результатами расчета, установленными численным методом (методом конечных элементов). Расчет осуществляется для примера БДПТ с внешним ротором и радиально намагниченными ПМ (рис. 1). Исходные данные для расчета представлены в табл. 1 [22].

Таблица 1

Исходные данные для расчета

Параметр	Значение
Радиус статора	11,35 мм
Эффективная длина	12,5 мм
Толщина ярма МПр ротора	1,1 мм
Толщина ярма МПр статора	1,1 мм
Ширина ПМ	4,5 мм
Остаточная магнитная индукция ПМ	1,1 Тл
Ширина паза статора	2,4 мм
Величина воздушного зазора	0,5 мм
Толщина ПМ	2 мм
Высота паза	5 мм
Ширина открытия паза статора	1,6 мм
Материал ПМ	NdFeB
Марка электротехнической стали	3406

На основе исходных данных построена ДКЭМ МП исследуемого БДПТ в режиме холостого хода, изображенная на рис. 10.

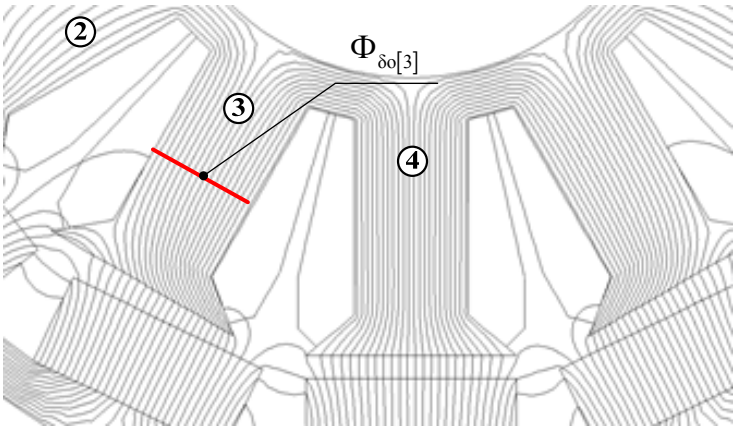


Рис. 10. К вопросу расчета основного магнитного потока через катушку обмотки методом конечных элементов:
— область расчета магнитного потока

Результаты расчета основного магнитного потока через катушку обмотки БДПТ аналитическим и численным методами для области [3] магнитной системы приведены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты расчета основного магнитного потока через катушку обмотки БДПТ аналитическим и численным методами

Аналитический метод $\Phi_{\delta o[3]} \cdot 10^{-6}$, Вб	Численный метод $\Phi_{\delta o[3]} \cdot 10^{-6}$, Вб	Погрешность, %
31,6	34,4	8,14

Из табл. 2 видно, что расхождение результатов, полученных посредством аналитического и численного методов, не превышают 10 %. Следовательно, разработанная методика характеризуется высоким классом точности. Погрешность является приемлемой для большинства инженерных расчетов и обуславлена принятыми допущениями при построении эквивалентной схемы магнитной цепи исследуемой электрической машины.

Заключение

Разработанная методика позволяет проводить расчет магнитных проводимостей и основного магнитного потока через катушку обмотки в БДПТ с высокой точностью. Небольшая погрешность расчетов (менее 10 %) достигается за счет учета потоков краевого эффекта и рассеяния, а также зависимости их величины от координаты положения ротора. В методике расчета используются аналитические связи между геометрическими параметрами магнитной системы, величиной основного магнитного потока через катушку обмотки и величинами коэффициентов рассеяния и краевого эффекта в магнитной системе исследуемого БДПТ. Таким образом, предложенная методика расчета может быть использована в процессе оптимизации БДПТ.

Литература

1. Вольдек, А. И. Электрические машины. Машины переменного тока : учеб. для вузов / А. И. Вольдек, В. В. Попов. – СПб. : Питер, 2008. – 350 с.
2. Levi, E. Multiphase Electric Machine for Variable Speed Applications / E. Levi // IEEE Transactions on Industrial Electronics. – 2008. – Vol. 55, N 5. – P. 1893–1909. – DOI 10.1109/tie.2008.918488
3. Шевченко, А. Ф. Электромеханические преобразователи энергии с модулированным магнитным потоком : дис. … д-ра техн. наук : 05.09.03 / Шевченко Александр Федорович ; Новосиб. гос. техн. ун-т. – Новосибирск, 1999. – 340 л.
4. Честюнина, Т. В. Исследование многополюсных синхронных магнитоэлектрических генераторов с дробными зубцовыми обмотками : дис. … канд. техн. наук : 05.09.01 / Честюнина Татьяна Викторовна ; Новосиб. гос. техн. ун-т. – Новосибирск, 2012. – 176 л.
5. Герасимович, Ю. Э. Бесколлекторные двигатели / Ю. Э. Герасимович // Актуальные проблемы энергетики 2017 : материалы студен. науч.-техн. конф. / Белорус. нац. техн. ун-т. – Минск, 2018. – С. 237–242.
6. Purnalal, M. Development of mathematical model and speed control of BLDC motor / M. Purnalal, T. K. Sunil Kumar // International Journal of Electrical and Electronics Engineers IJEEE. – 2015. – Jan–June. – Vol. 7, iss. 1. – P. 271–280.
7. Фираго, Б. И. Регулируемые электроприводы переменного тока / Б. И. Фираго, Л. Б. Павлячик. – Минск : Техноперспектива, 2006. – 363 с.

8. Мигунов, А. Л. Математическая модель трехфазного, многополюсного бесконтактного двигателя постоянного тока / А. Л. Мигунов, С. Ю. Кауров, М. Н. Алимбеков // Вестник транспорта Поволжья. – 2016. – № 3. – С. 71–77.
9. Мигунов, А. Л. Эквивалентная модель трехфазного многополюсного бесконтактного двигателя постоянного тока в системах управления и регулирования / А. Л. Мигунов, С. Ю. Кауров, М. Н. Алимбеков // Вестник СамГУПС. – 2017. – № 2. – С. 94–99.
10. Вельченко, А. А. Математическая модель бесколлекторного двигателя постоянного тока на основе уравнения напряжения трехфазной обмотки / А. А. Вельченко, С. А. Павлюковец, А. А. Радкевич // Системный анализ и прикладная информатика. – 2024. – № 1. – С. 19–25.
11. Иванов-Смоленский, А. В. Применение метода проводимостей зубцовых контуров для расчета синхронных машин с постоянными магнитами на поверхности ротора / А. В. Иванов-Смоленский, М. А. Аванесов, Е. В. Казьмин // Электричество. – 2009. – № 8. – С. 42–51.
12. Сан, Ю. Погружные вентильные электродвигатели с зубцовым шагом обмотки статора : дис. … канд. техн. наук : 05.09.03 / Ю. Сан ; С.-Петерб. гос. мор. техн. ун-т. – СПб., 2017. – 153 л.
13. Analysis of Tooth-Tip Flux Leakage in Surface-Mounted Permanent Magnet Linear Vernier Machines / W. Li, K. Chau, C. Liu [et al.] // IEEE Transactions on Magnetics. – 2013. – Vol. 49, N 7. – P. 3949–3952. – DOI 10.1109/TMAG.2013.2244581
14. Calculation and Analysis of Flux Leakage Coefficient of Interior Permanent Magnet Synchronous Motors with Fractional Slot Concentrated Windings / P. Gao, Y. X. Gu, S. H. Sha [et al.] // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. – 2019. – Vol. 29, N 2. – Article 0602004. – DOI 10.1109/TASC.2019.2893740
15. Шрейнер, Р. Т. Математическое моделирование электроприводов переменного тока с полупроводниковыми преобразователями частоты / Р. Т. Шрейнер. – Екатеринбург : УрО РАН, 2000. – 583 с.
16. Балагуров, В. А. Электрические генераторы с постоянными магнитами / В. А. Балагуров, Ф. Ф. Галтеев. – М. : Энергоатомиздат, 1988. – 280 с.
17. Балагуров, В. А. Электрические машины с постоянными магнитами / В. А. Балагуров, Ф. Ф. Галтеев, А. Н. Ларионов ; под ред. А. Н. Ларионова. – М. ; Л. : Энергия, 1964. – 480 с.
18. Захаренко, А. Б. Оптимизация проектирования тихоходного вентильного двигателя / А. Б. Захаренко, А. Ф. Авдонин // Электротехника. – 1999. – № 12. – С. 6–13.
19. Ponomarev, P. Effect of Slot-and-Pole Combination on the Leakage Inductance and the Performance of Tooth-Coil Permanent-Magnet Synchronous Machines / P. Ponomarev, P. Lindh, J. Pyrhonen // IEEE Transactions on Industrial Electronics. – 2013. – Vol. 60, N 10. – P. 4310–4317. – DOI 10.1109/TIE.2012.2216246
20. Нго, Фыонг Ле. Расчет индуктивностей синхронного двигателя с инкорпорированными постоянными магнитами / Фыонг Ле Нго // Энергетика. Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ. – 2017. – Т. 60, № 2. – С. 133–146. – DOI 10.21122/1029-7448-2017-60-2-133-146
21. Пантелеев, С. В. Разработка аналитической модели для определения основного магнитного потока через катушку рабочей обмотки синхронной электрической машины с дробной зубцовой обмоткой / С. В. Пантелеев, А. Б. Менжинский, А. Н. Малашин // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-тэхнічных навук. – 2022. – Т. 67, № 1. – С. 75–85.
22. Менжинский, А. Б. Разработка аналитической модели для определения магнитного потока рассеяния через зубцы статора синхронной электрической машины с дробной зубцовой обмоткой / А. Б. Менжинский, А. Н. Малашин, С. В. Пантелеев // Энергетика. Известия вузов и энергетических объединений СНГ. – 2022. – № 3. – С. 224–239.
23. Хитерер, М. Я. Синхронные электрические машины возвратно-поступательного движения : учеб. пособие / М. Я. Хитерер, И. Е. Овчинников. – СПб. : Корона принт, 2013. – 357 с.

24. Тарашев, С. А. Вентильный линейный генератор для систем электропитания автономных объектов : дис. … канд. техн. наук : 05.09.01 / Тарашев Сергей Александрович ; Самар. гос. техн. ун-т. – Самара, 2011. – 129 л.
25. Бабикова, Н. Л. Генератор возвратно-поступательного движения в автономной системе электроснабжения маломощных потребителей : дис. … канд. техн. наук : 05.09.03 / Бабикова Наталья Львовна ; Уфим. гос. авиац. техн. ун-т. – Уфа, 2009. – 147 л.
26. Менжинский, А. Б. Разработка уточненных электромагнитных моделей электрических генераторов возвратно-поступательного движения с постоянными магнитами / А. Б. Менжинский, А. Н. Малашин, П. Б. Менжинский // Энергетика. Известия вузов и энергетических объединений СНГ. – 2021. – Т. 64, № 4. – С. 291–302. – DOI 10.21122/1029-7448-2021-64-4-291-302
27. ELCUT. Моделирование электромагнитных, тепловых и упругих полей методом конечных элементов. Версия 6.6 : рук. пользователя. – СПб. : Тор, 2023. – URL: https://elcut.ru/downloads/manual_r.pdf (дата обращения: 29.05.2024).

References

1. Vol′dek A. I., Popov V. V. *Electrical machines. Alternating current machines.* Saint Petersburg, Piter Publ., 2008. 350 p. (in Russian).
2. Levi E. Multiphase Electric Machine for Variable Speed Applications. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2008, vol. 55, no. 5, pp. 1893–1909. DOI 10.1109/tie.2008.918488
3. Shevchenko A. F. *Electromechanical energy converters with modulated magnetic flux*. Novosibirsk, 1999. 340 p. (in Russian).
4. Chestjunina T. V. *Research of multi-pole synchronous magnetoelectric generators with fractional tooth windings*. Novosibirsk, 2012. 176 p. (in Russian).
5. Gerasimovich Yu. E. Brushless motors. *Aktual'nye problemy energetiki 2017 : materialy studencheskoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii* [Actual problems of energy 2017 : materials of the student scientific and technical conference]. Minsk, Belorusskii natsional′nyi tekhnicheskii universitet, 2018, pp. 237–242 (in Russian).
6. Purnalal M., Sunil Kumar T. K. Development of mathematical model and speed control of BLDC motor. *International Journal of Electrical and Electronics Engineers IJEEE*, 2015, Jan-June, vol. 7, iss. 1, pp. 271–280.
7. Firago B. I., Pavlyachik L. B. *Adjustable AC electric drives*. Minsk, Tekhnoperspektiva Publ., 2006. 363 p. (in Russian).
8. Migunov A. L., Kaurov S. Yu., Alimbekov M. N. Mathematical model of a three-phase, multipole contactless DC motor. *Vestnik transporta Povolzh'ya = Bulletin of transport of the Volga region*, 2016, no. 3, pp. 71–77 (in Russian).
9. Migunov A. L., Kaurov S. Yu., Alimbekov M. N. An equivalent model of a three-phase multipole contactless DC motor in control and regulation systems. *Vestnik SAMGUPS = Bulletin of SAMGUPS*, 2017, no. 2, pp. 94–99 (in Russian).
10. Velchenko A. A., Pauliukavets S. A., Radkevich A. A. Mathematical model of brusherless dc motor based on the voltage equation of a three-phase winding. *Sistemnyi analiz i prikladnaya informatik = System analysis and applied information science*, 2024, no. 1, pp. 19–25 (in Russian).
11. Ivanov-Smolenskii A. V., Avanesov M. A., Kaz′min E. V. Application of the method of conductivity of toothed con-tours for calculating synchronous machines with permanent magnets on the surface of the rotor. *Elektrichestvo = Electricity*, 2009, no. 8, pp. 42–51 (in Russian).
12. San Ju. *Submersible Valve Motors with Toothed Stator Winding Pitch*. Saint Petersburg, 2017. 153 p. (in Russian).

13. Li W., Chau K., Liu C., Gao S., Wu D. Analysis of Tooth-Tip Flux Leakage in Surface-Mounted Permanent Magnet Linear Vernier Machines. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2013, vol. 49, no. 7, pp. 3949–3952. DOI 10.1109/TMAG.2013.2244581
14. Gao P., Gu Y. X., Sha S. H., Abubakar U., Wang X. Y. Calculation and Analysis of Flux Leakage Coefficient of Interior Permanent Magnet Synchronous Motors with Fractional Slot Concentrated Windings. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 2019, vol. 29, no. 2, Article 0602004. DOI 10.1109/TASC.2019.2893740
15. Shreiner R. T. Mathematical *Modeling of AC Electric Drives with Semiconductor Frequency Converters*. Yekaterinburg, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 2000. 583 p. (in Russian).
16. Balagurov V. A., Galteev F. F. *Permanent magnet electric generators*. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1988. 280 p. (in Russian).
17. Balagurov V. A., Galteev F. F., Larionov A. N. *Permanent magnet electric generators*. Ed. Larionov A. N. Moscow, Energiya Publ., 1964. 480 p. (in Russian).
18. Zaharenko A. B., Avdonin A. F. Optimization of the design of a low-speed valve motor. *Elektrotehnika = Electrical Engineering*, 1999, no. 12, pp. 6–13 (in Russian).
19. Ponomarev P., Lindh P., Pyrhonen J. Effect of Slot-and-Pole Combination on the Leakage Inductance and the Performance of Tooth-Coil Permanent-Magnet Synchronous Machines. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2013, vol. 60, no. 10, pp. 4310–4317. DOI 10.1109/TIE.2012.2216246
20. Phyong Le Ngo. Calculation of inductance of the interior permanent magnet synchronous motor. *Energetika. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii i energeticheskikh ob"edinenii SNG = ENERGETIKA. Proceedings of CIS higher education institutions and power engineering associations*, 2017, vol. 60, no. 2, pp. 133–146 (in Russian). DOI 10.21122/1029-7448-2017-60-2-133-146
21. Panteleev S. V., Menzhinski A. B., Malashin A. N. Development of an analytical model for determining the main magnetic flux through the coil of the working winding of a synchronous electric machine with a fractional tooth winding. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnych navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2022, vol. 67, no. 1, pp. 75–85 (in Russian).
22. Menzhinski A. B., Malashin A. N., Panteleev S. V. Development of an analytical model for determining the magnetic flux of scattering through the teeth of the stator of a synchronous electric machine with a fractional tooth winding. *Energetika. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii i energeticheskikh ob"edinenii SNG = ENERGETIKA. Proceedings of CIS higher education institutions and power engineering associations*, 2022, no. 3, pp. 224–239 (in Russian).
23. Khiterer M. Ya., Ovchinnikov I. E. *Synchronous reciprocating electric machines*. Saint Petersburg, Korona print Publ., 2013. 368 p. (in Russian).
24. Tarashev S. A. *Valve linear generator for power supply systems of autonomous facilities*. Samara, 2011. 129 p. (in Russian).
25. Babikova N. L. *Generator of reciprocating motion in the autonomous power supply system of low-power consumers*. Ufa, 2009. 147 p. (in Russian).
26. Menzhinski A. B., Malashin A. N., Menzhinski P. B. Development of refined electromagnetic models of reciprocating electric generators with permanent magnets. *Energetika. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii i energeticheskikh ob"edinenii SNG = ENERGETIKA. Proceedings of CIS higher education institutions and power engineering associations*, 2021, no. 4, pp. 291–302 (in Russian). DOI 10.21122/1029-7448-2021-64-4-291-302
27. ELCUT *Modeling of Electromagnetic, Thermal, and Elastic Fields by the Finite Element Method. Version 6.6*. Saint Petersburg, Tor Publ., 2023. URL: https://elcut.ru/downloads/manual_r.pdf (accessed 29.05.2024) (in Russian).

Поступила 28.05.2025 г.