УДК 621-192

DOI 10.62595/1819-5245-2025-3-37-45

РАЗРАБОТКА УНИВЕРСАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ ВИНТОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРИ ОБРАБОТКЕ ВНУТРЕННЕЙ И НАРУЖНОЙ ФРЕЗАМИ

М. И. МИХАЙЛОВ, В. А. ПРОКОПОВИЧ, Б. А. ТРИФАН

*Учреждение образования «Гомельский государственный
технический университет имени П. О. Сухого»,
Республика Беларусь*

Представлен анализ математических моделей получения огранки при вихревом фрезеровании винтовых поверхностей. Разработана универсальная математическая модель формообразования винтовых поверхностей при обработке внутренней и наружной фрезами. Приведена оценка полученных моделей в пакете прикладных программ Mathcad.

Ключевые слова: фрезерование винтовых поверхностей, формообразование, универсальные модели, топография поверхности.

Для цитирования. Михайлов, М. И. Разработка универсальной модели формообразования винтовых поверхностей при обработке внутренней и наружной фрезами / М. И. Михайлов, В. А. Прокопович, Б. А. Трифан // Вестник Гомельского государственного технического университета имени П. О. Сухого. – 2025. – № 3 (102). – С. 37–45. – DOI 10.62595/1819-5245-2025-3-37-45

DEVELOPMENT OF A UNIVERSAL MODEL FOR THE FORMATION OF HELICAL SURFACES DURING INTERNAL AND EXTERNAL MILLING

M. I. MIKHAILOV, V. A. PROKOPOVICH, B. A. TRIFAN

*Sukhoi State Technical University of Gomel,
the Republic of Belarus*

This article presents an analysis of mathematical models for producing facets during whirl milling of helical surfaces. A universal mathematical model for the formation of helical surfaces during internal and external milling is developed. The resulting models are evaluated using the Mathcad software package.

Keywords: helical surface milling, formation, universal models, surface topography.

For citation. Mikhailov M. I., Prokopovich V. A., Trifan B. A. Development of a universal model for the formation of helical surfaces during internal and external milling. *Vestnik Gomel'skogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta imeni P. O. Sukhogo*, 2025, no. 3 (102), pp. 37–45 (in Russian). DOI 10.62595/1819-5245-2025-3-37-45

Введение

Одними из высокопроизводительных методов обработки винтовых поверхностей деталей машин являются методы фрезерования внутренними и внешними фрезами [1, 2]. Они позволяют обрабатывать цилиндрические поверхности валов, резьбы ходовых винтов станков, тяговых винтов прессов, червяки червячных передач и другие детали, имеющие винтовые поверхности. Несмотря на то, что метод внутреннего фрезерования известен с 50-х гг. XX в. [3], к нему постоянно проявляется повышенный интерес [4–6].

Одна из особенностей внутреннего фрезерования поверхностей – получаемая топография, так называемая «огранка» [1]. От характера топографии обработанной поверхности зависит работоспособность деталей машин. Например, продольные неровности винтовых канавок шарико-винтовых передач вызывают высокочастотное радиальное биение шариков, что может приводить к вибрациям, повышенному износу, потере кинематической точности и выходу передачи «винт–гайка» из строя [7].

Анализ работ, посвященных расчету топографии (огранки) поверхности обработанной внутренним фрезерованием [1, 2, 6, 8–11], позволил выявить четыре основные формулы (табл. 1). При выводе формул (1)–(4) в качестве траектории движения точки режущей кромки инструмента упрощенно принималась окружность, анализ погрешностей, вносимых этим упрощением, не проводился. Кроме того, все эти формулы не учитывают влияние угла наклона внутренней фрезы на шероховатость, т. е. при выводе формул принято, что оси вращения обрабатываемой детали и инструмента параллельны. Формула (4) в отличие от формул (1)–(3) позволяет выполнять расчет как для встречного (знак «плюс») так и для попутного фрезерования (знак «минус»). Формулы для расчета (2) и (3) совпадают, в чем можно убедиться, подставив в них параметры вихревого фрезерования согласно табл. 1.

Интерес представляет статья [12], в которой процесс охватывающего фрезерования при параллельных осях вращения инструмента и обрабатываемой детали анализировался на основе проекции на плоскость реальной траектории движения точки режущей кромки инструмента: удлиненной эпициклоиде – при встречном фрезеровании и удлиненной гипоциклоиде – при попутном фрезеровании. Однако расчет топографии обработанной поверхности в этом исследовании не производился.

Таблица 1

Формулы для определения величины огранки

Формулы	Параметры вихревого фрезерования (рис. 1)				Источник
	n_n	n_d	r_f	R_a	
$y_0 = 5 \cdot b \left(\frac{N}{n \cdot z} \right)^2 \quad (1)$	n	N	–		[2]
$h_{or} = \sqrt{r_p^2 - e^2 \left(\sin \frac{\Phi}{2} \right)^2} - \left(e \cdot \cos \frac{\Phi}{2} + r_1 \right), \quad (2)$ где $\Phi = \frac{360 \cdot n_n}{n_p \cdot z}$, $e = r_p - r_1$	n_p	n_n	r_1	r_p	[1]
$\Delta = \sqrt{r^2 - L_{м.ц}^2 \left(\sin \frac{\xi}{2} \right)^2} - L_{м.ц} \cdot \cos \frac{\xi}{2} - (R - t), \quad (3)$ где $\xi = \frac{2\pi \cdot n_a}{n_b \cdot z}$, $L_{м.ц} = r - R + t$	n_b	n_a	$R - t$	r	[8], [9]
$h = \frac{\frac{d_3}{2} \left(1 - \cos \frac{180 \cdot V_3 d_{pr}}{V_{pr} \pm V_3} \right) - \frac{d_{pr}}{2} \left(1 - \cos \frac{1,8}{z} \right)}{\cos \frac{180 \cdot V_3 d_{pr}}{z \cdot d_3 (V_{pr} \pm V_3)}}, \quad (4)$ где b , e , $L_{м.ц}$ – кратчайшее расстояние между осями заготовки и инструментальной головки a	$\frac{1000 \cdot V_{pr}}{\pi d_{pr}}$	$\frac{1000 \cdot V_3}{\pi d_3}$	$\frac{d_3}{2}$	$\frac{d_{pr}}{2}$	[6], [10], [11]

Цель настоящей работы – моделирование формообразования винтовых поверхностей внутренним и наружным фрезерованием.

Основная часть

Разработка универсальной математической модели осуществлялась поэтапно.

На первом этапе использовалась обобщенная модель формообразования (рис. 1) [13].

Рис. 1. Расчетная схема универсальной кинематической модели процессов формообразования

Используя универсальную кинематическую модель процессов формообразования, ее математическая модель будет иметь вид:

$$\bar{r}_o = \prod_n [A_m(\psi_i^3)] \prod_k [A_l(\xi_j^3)] \prod_k [A_l(a_i)] \prod_n [A_m(\psi_i^u)] \prod_k [A_l(\xi_j^u)] \bar{r}_u, \quad (1)$$

где $n = 3$; $m = 4, 5, 6$; $i = 1, 2, 3$; $k = 3$; $l = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$.

Параметры модели формообразования для обработки винтовых поверхностей приведены в табл. 2.

Таблица 2

Параметры и связи при обработке типовой винтовой поверхности

Исходные параметры	Связи формообразования	Вид, условия обработки
$0 \leq \psi_1^3 \leq 2\pi N$; $0 \leq \psi_1^u \leq 2\pi N$; $N = 1 \dots K$; $\psi_i^3 = 0$; $i = 2, 3$; $\xi_j^3 = 0$; $j = 2, 3$; $a_i = 0$; $i = 1, 3$; $a_2 = t$; $\psi_i^u = 0$; $i = 2, 3$; $\xi_j^u = 0$; $j = 2, 3$	а) $\psi_1^3 = \frac{\psi_1^u}{2\pi} S_{кр}^3$; $\xi_1^3 = \frac{\psi_1^3}{2\pi} S_o^3$	1. Фрезерование внутренней фрезой при: а) вращающемся инструменте и вращающейся и перемещающейся вдоль оси заготовке
$0 \leq \psi_1^3 \leq 2\pi N$; $0 \leq \psi_1^u \leq 2\pi N$; $N = 1 \dots K$; $\psi_i^3 = 0$; $i = 2, 3$; $\xi_j^3 = 0$; $j = 1, 2, 3$; $a_i = 0$; $i = 1, 3$; $a_2 = t$; $\psi_i^u = 0$; $i = 2, 3$; $\xi_j^u = 0$; $j = 2, 3$	б) $\psi_1^3 = \frac{\psi_1^u}{2\pi} S_{кр}^3$; $\xi_1^u = \frac{\psi_1^u}{2\pi} S_o^u$	б) вращающемся инструменте и заготовке и перемещающемся инструменте

Исходные параметры	Связи формообразования	Вид, условия обработки
$0 \leq \psi_1^3 \leq 2\pi N$; $0 \leq \psi_1^n \leq 2\pi N$; $N = 1 \dots K$; $\psi_i^3 = 0$; $i = 2, 3$; $\xi_j^3 = 0$; $j = 2, 3$; $a_i = 0$; $i = 1, 3$; $a_2 = r^3 + R^n$; $\psi_i^n = 0$; $i = 2, 3$; $\xi_j^n = 0$; $j = 1, 3$; $\xi_2^n = R^n$	а) $\Psi_1^3 = \frac{\Psi_1^n}{2\pi} S_{кр}^3$; $\xi_1^3 = \frac{\Psi_1^3}{2\pi} S_o^3$	2. Фрезерование наружной фрезой при: а) вращающемся инструменте и вращающейся и перемещающейся вдоль оси заготовке
$0 \leq \psi_1^3 \leq 2\pi N$; $0 \leq \psi_1^n \leq 2\pi N$; $N = 1 \dots K$; $\psi_i^3 = 0$; $i = 2, 3$; $\xi_j^3 = 0$; $j = 1, 2, 3$; $a_i = 0$; $i = 1, 3$; $a_2 = r^3 + R^n$; $\psi_i^n = 0$; $i = 2, 3$; $\xi_j^n = 0$; $j = 3$; $\xi_2^n = R^n$	б) $X_2, Y_2, Z_2,$ $\xi_1^n = \frac{\Psi_1^n}{2\pi} S_o^n$	б) вращающемся инструменте и заготовке и перемещающемся вдоль оси инструменте

На втором этапе разрабатывались частные расчетные схемы. На рис. 2, а, б представлены схемы формообразования винтовой поверхности внутренней фрезой, а на рис. 2, в, г – наружной. Формообразование поверхностей происходит путем движения инструментальной поверхности вдоль направляющей поверхности детали.

Рис. 2. Расчетные схемы

В расчетные схемы вводилась система координат, ось Z_0 которой совпадает с осью главного вращательного движения. Ось Y_0 располагается вертикально, а ось X_0 дополняла систему $X_0 Y_0 Z_0$ до правой тройки векторов. Такая система координат является исходной системой координат. Условно принято, что все движения формообразования совершает инструмент.

Каждое движение формообразования моделировалось матрицей. Формировалось общее матричное выражение, описывающее все формообразующие движения (2):

$$[r0] = [A6(\gamma1)] \cdot [A1(x2)] \cdot [A2(y3)] \cdot [A3(z4)] \cdot [A3(z6)] \cdot \left[A5\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \right] \cdot [A1(x8)] \cdot [e]. \quad (2)$$

Затем выбиралась произвольная точка на режущей кромке, в которой помещается начало новой системы координат, при этом ось Z_5 направлена по касательной к режущей кромке, а ось X_5 перпендикулярна режущей кромке. Кроме того, ось Y_5 направлена так, чтобы образовалась правая тройка. Используя элементарные перемещения и повороты выбранной системы координат, ее совмещают с исходной. Полученные элементарные перемещения и повороты записываются в матричной форме.

Формируется матричное выражение, моделирующее формообразующие кромки инструмента, при этом матрицы записываются от конечного элементарного преобразования до начального.

Это выражение связывает радиус вектор инструмента с базовой исходной системой координат.

Используя матричные связи между системами координат, создается матричная модель формообразования кромки инструмента.

Производится выделение переменных и постоянных параметров в выражении, описывающем кинематическую поверхность.

Определяются взаимосвязи между выделенными параметрами:

$$x2 = Spr \frac{\gamma1}{2\pi}; \quad y3 = \sqrt{a^2 - (-x2 + a)^2}; \quad y3 = \frac{\gamma1 \cdot 4}{\pi \cdot a}; \quad z4 = 10 \frac{\gamma3}{2\pi};$$

$$z6 = 0, \frac{t}{n} \dots t; \quad x8 = r - t; \quad x1 = a.$$

Используя пакет прикладных программ Mathcad, получили траектории движения инструмента для обработки винта с шагом 10 мм.

Таблица 3

Параметры и связи при обработке типовой винтовой поверхности

Исходные данные	Матрицы преобразований
$\gamma1 := 0, \frac{\pi}{4} \dots 2 \cdot \pi$ $Spr := 10 \quad a := 10$	$A61 := \left\ \left\ \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ N_i \leftarrow \begin{bmatrix} \cos(\gamma1_i) & \sin(\gamma1_i) & 0 & 0 \\ -\sin(\gamma1_i) & \cos(\gamma1_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{return } N \end{array} \right. \right\ $ $A12 := \left\ \left\ \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ N_i \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x2_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{return } N \end{array} \right. \right\ $

Исходные данные	Матрицы преобразований	
	$A23 := \left\ \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ \left\ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y3_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ N_i \leftarrow \\ \text{return } N \end{array} \right\ \end{array} \right\ $ $A34 := \left\ \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ \left\ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -z4_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ N_i \leftarrow \\ \text{return } N \end{array} \right\ \end{array} \right\ $ $A36 := \left\ \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ \left\ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z6_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ N_i \leftarrow \\ \text{return } N \end{array} \right\ \end{array} \right\ $ $A5 := \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) & 0 & -\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) & 0 & \cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $A18 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
Диапазоны изменения выделенных параметров	Общее матричное выражение	
$x1 := -25, -24..25 = \begin{bmatrix} -25 \\ \vdots \end{bmatrix}$ $y1 := \sqrt{25^2 - (x1)^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 9.798 \\ 11.874 \\ \vdots \end{bmatrix}$ $y2 := -\sqrt{25^2 - (x1)^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ -9.798 \\ -11.874 \\ \vdots \end{bmatrix}$	$r0 := \left\ \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ \left\ \begin{array}{l} N_i \leftarrow A11 \cdot A12 \cdot A23 \cdot A61 \cdot A34 \cdot A36 \cdot A5 \cdot A18 \cdot e \\ \text{return } N \end{array} \right\ \end{array} \right\ $	
Значения положения x, y, z		
$x := \left\ \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ \left\ \begin{array}{l} N_i \leftarrow (r0)_i \\ \text{return } N \end{array} \right\ \end{array} \right\ _{0,3}$	$y := \left\ \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ \left\ \begin{array}{l} N_i \leftarrow (r0)_i \\ \text{return } N \end{array} \right\ \end{array} \right\ _{1,3}$	$z := \left\ \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ \left\ \begin{array}{l} N_i \leftarrow (r0)_i \\ \text{return } N \end{array} \right\ \end{array} \right\ _{2,3}$

По полученным данным строится траектория движения зуба фрезы при формообразовании поверхности ходового винта (рис. 3), позволяющая определить топографию кинематической поверхности (рис. 4).

Рис. 3. Траектория движения зуба фрезы при формообразовании

Рис. 4. Параметры топографии поверхности после фрезерования:
 а, б – внутренней фрезой; в – наружной фрезой

Заключение

Таким образом, на основе проведенных исследований можно сделать вывод о том, что полученные математические модели позволяют оптимизировать параметры топографии кинематической поверхности ходового винта.

Литература

1. Виксман, Е. С. Скоростное нарезание резьб и червяков: (вихревое нарезание вращающимися резцами) / Е. С. Вихсман. – М. : Машиностроение, 1966. – 91 с.
2. Розенберг, С. А. Охватывающее фрезерование / С. А. Розенберг. – М. : Тип. им. Воровского, 1950. – 36 с.
3. Левин, Б. Г. Скоростной метод нарезания резьбы / Б. Г. Левин, А. М. Фраткин. – М. : Ленингр. отд. и 1-я тип. Машгиза, 1948. – 41 с.
4. Wehmann, R. The Whirling Process for Improved Worm Gears 2003 / R. Wehmann // Gear Solutions Magazine. – 2003. – Okt. – URL: http://www.gearsolutions.com/media/uploads/assets/Digital_Editions/2003Digfiles/1003/GearSolutions1003.pdf (date of access: 10.10.2017).
5. Foitzik, B. Viel Wirbel um Qualität WB / B. Foitzik // Werkstatt + Betrieb. – 2015. – N 9. – URL: <https://www.werkstatt-betrieb.de/wb-zeitschrift/archiv/artikel/wirbelmaschinen-industrie-4-0-inbetriebnahme-zuverlaessigkeit-1155128.html> (date of access: 10.10.2017).
6. Плотников, Ф. А. Повышение эффективности технологии обработки наружных винтовых канавок трения качения : дис. ... канд. техн. наук : 05.02.08 / Плотников Федор Андреевич ; Рыбин. гос. авиац. техн. ун-т им. П. А. Соловьева. – М., 2015. – 127 с.
7. Инженерия поверхности деталей / А. Г. Суслов, А. О. Горленко, В. П. Тихомиров [и др.] ; под ред. А. Г. Суслова. – М. : Машиностроение, 2008. – 318 с.
8. Мархасин, Э. Л. Фрезерование тел вращения / Э. Л. Мархасин, А. А. Петросянц. – М. : Машгиз, 1960. – 111 с.
9. Этин, А. О. Кинематический анализ и выбор эффективных методов обработки лезвийным инструментом / А. О. Этин, М. Е. Юхвид ; под ред. М. А. Эстерзона. – М. : ЭНИМС, 1994. – 185 с.
10. Суслов, А. Г. Формирование продольных неровностей винтовых канавок при вихревом нарезании / А. Г. Суслов, Ф. А. Плотников // Научные технологии в машиностроении. – 2014. – № 6. – С. 20–23.
11. Суслов, А. Г. Справочный материал по вихревому нарезанию винтовых канавок / А. Г. Суслов, Ф. А. Плотников // Справочник. Инженерный журнал. – 2014. – № 11. – С. 50–58.
12. Емелик, М. И. Кинематика охватывающего фрезерования / М. И. Емелик // Вестник машиностроения. – 1958. – № 8. – С. 47–50.
13. Михайлов, М. И. Сборный металлорежущий механизированный инструмент: Ресурсосберегающие модели и конструкции / М. И. Михайлов. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2008. – 339 с.

References

1. Viksman E. S. *Speed cutting of threads and worms: vortex cutting by rotating cutters*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1966. 91 p. (in Russian).
2. Rozenberg S. A. *Encompassing milling*. Moscow, Tipografiya im. Vorovskogo Publ., 1950. 36 p. (in Russian).
3. Levin B. G. *High-speed threading method*. Moscow, 1-ya tipografiya Mashgiza Publ., 1948. 41 p. (in Russian).
4. Wehmann R. The Whirling Process for Improved Worm Gears 2003. *Gear Solutions Magazine*, 2003, Oktober. URL: http://www.gearsolutions.com/media/uploads/assets/Digital_Editions/2003Digfiles/1003/GearSolutions1003.pdf. (accessed 10.10.2017).
5. Foitzik B. Viel Wirbel um Qualität WB. *Werkstatt + Betrieb*, 2015, no. 9. URL: <https://www.werkstatt-betrieb.de/wb-zeitschrift/archiv/artikel/wirbelmaschinen-industrie-4-0-inbetriebnahme-zuverlaessigkeit-1155128.html> (accessed 10.10.2017).

6. Plotnikov F. A. *Improving the efficiency of rolling friction external screw groove processing technology*. Moscow, 2015. 127 p. (in Russian).
7. Suslov A. G., Gorlenko A. O., Tihomirov V. P., Bishutin S. G., S"yanov S. Yu., Bez"yazychnyj V. F., Petreishn D. I., Panfilov Yu. V., Fedorov V. P., Fedopin O. N., Govorov I. V., SHCHerbakov A. N., Stalo V. I., Finatov D. N. *Inzheneriya poverhnosti detalej*. Ed. A. G. Suslova. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2008. 318 p. (in Russian).
8. Marhasin E. L., Petrosyanc A. A. *Milling of bodies of rotation*. Moscow, Mashgiz Publ., 1960. 111 p. (in Russian).
9. Etin A. O., Yuhvid M. E. *Kinematic analysis and selection of effective blade tool processing methods*. Ed. Esterzon M. A. Moscow, ENIMS Publ., 1994. 185 p. (in Russian).
10. Suslov A. G., Plotnikov F. A. *Formation of longitudinal irregularities of screw grooves during vortex cutting*. Naukoemkie tekhnologii v mashinostroenii = *Science Intensive Technologies In Mechanical Engineering*, 2014, no. 6, pp. 20–23 (in Russian).
11. Suslov A. G., F. A. Plotnikov. Reference material on vortex cutting of screw grooves *Spravochnik. Inzhenernyj zhurnal = Handbook. An Engineering Journal*. 2014, no. 11, pp. 50–58 (in Russian).
12. Emelik M. I. Kinematics of encompassing milling. *Vestnik mashinostroeniya*, 1958, no. 8, pp. 47–50 (in Russian).
13. Mihajlov M. I. *Prefabricated metal-cutting mechanized tools: Resource-saving models and designs*. Gomel', GGTU im. P. O. Suhogo, 2008, 339 p. (in Russian).

Поступила 08.09.2025 г.