УДК 519.5
DOI 10.62595/1819-5245-2025-2-67-75

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕТОДОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ АНАЛОГИИ И МЕТОДА ТЕОРЕМ СЛОЖЕНИЯ

Д. В. КОМНАТНЫЙ

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь

Предложена математическая модель методов электрического зондирования, к которым могут быть отнесены электрическая структурография и электрическое профилирование. На основании электростатической аналогии представлена обобщенная модель методов зондирования. Поставлена задача математической физики для расчета потенциала электрического поля в этой модели. Методом теорем сложения получено решение задачи и выведены уравнения диагностики. Путем численного решения этих уравнений могут быть определены параметры неоднородности, обнаружение которой является целью зондирования. Метод решения задачи достаточно универсален и может быть распространен на более сложные случаи.

Ключевые слова: электрическое зондирование, математическая модель, электростатическая аналогия, задача математической физики, теоремы сложения, уравнения диагностики.

Для цитирования. Комнатный, Д. В. Математическая модель методов электрического зондирования на основе электростатической аналогии и метода теорем сложения / Д. В. Комнатный // Вестник Гомельского государственного технического университета имени П. О. Сухого. – 2025. – № 2 (101). – С. 67–75. – DOI 10.62595/1819-5245-2025-2-67-75

MATHEMATICAL MODEL OF ELECTRICAL SOUNDING METHODS BASED ON ELECTROSTATIC ANALOGY AND THE METHOD OF ADDITION THEOREMS

D. V. KOMNATNY

Sukhoi State Technical University of Gomel, the Republic of Belarus

A mathematical model of electrical sounding methods is proposed, which may include electrical structurography and electrical profiling. A generalized model of sounding methods is presented based on electrostatic analogy. A problem of mathematical physics is set for calculating the electric field potential in this model. The solution to the problem is obtained by the method of addition theorems and diagnostic equations are derived. By numerically solving these equations, the parameters of the heterogeneity can be determined, the detection of which is the purpose of sounding. The method for solving the problem is quite universal and can be extended to more complex cases.

Keywords: electrical sounding, mathematical model, electrostatic analogy, mathematical physics problem, addition theorems, diagnostic equations.

For citation. Komnatny D. V. Mathematical model of electrical sounding methods based on electrostatic analogy and the method of addition theorems. *Vestnik Gomel'skogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta imeni P. O. Sukhogo*, 2025, no. 2 (101), pp. 67–75 (in Russian). DOI 10.62595/1819-5245-2025-2-67-75

Введение

В настоящее время активно осуществляется разработка и применение высоких компьютерных технологий в различных областях, обеспечивающих жизнедеятельность человеческого общества.

Примерами таких технологий, взятых из значительно разнящихся областей, являются электрическая структурография как метод компьютерной диагностики заболеваний [1, 2], и электрическое профилирование как метод обнаружения неоднородных включений в слоях почвы и горных пород [3–5].

Несмотря на несхожие области применения, физические основы обоих методов одинаковы. Методы основаны на регистрации электрического потенциала на поверхности исследуемого объекта и обнаружении неоднородности путем сравнения измеренного потенциала и известных заранее, теоретически установленных потенциалов в случае наличия неоднородности и ее отсутствия.

Таким образом, в общем случае физическая основа обоих методов может быть объединена под названием электрического зондирования. Из сказанного следует, что в математическом смысле методы электрического зондирования относятся к классу обратных задач. Подробная постановка такой задачи затруднена сложной конфигурацией ее границ, а решение – необходимостью использовать нетривиальные численные методы [1, 6].

Поэтому в обоих методах используются упрощающие предположения, которые позволяют сформулировать задачи, поддающиеся аналитическому решению.

Имеется положительный опыт решения задач электроструктурографии методом теорем сложения [1]. Указанный метод имеет большую общность и успешно применяется для решения задач математической физики, возникающих при расчете статических и стационарных электрических полей. В качестве примера можно указать на задачи экранирования [7, 8], расчета полей в электротехнических конструкциях [9, 10]. Поэтому возникает стремление использовать метод теорем сложения и при разработке моделей электрического зондирования.

Особенно метод теорем сложения может помочь при рассмотрении источников электрического поля, более сложных, нежели одиночный точечный заряд или диполь. Простые источники электрического поля часто рассматриваются при решении геофизических задач [3–5]. Но они могут оказаться недостаточными при решении задач медицинской электроструктурографии, или поиске незначительных по размерам и глубине залегания неоднородностей в почве.

Таким образом, в работе поставлена цель – разработка количественной модели электрического зондирования и получение расчетных соотношений для нее методом теорем сложения.

Разработка модели и постановка краевой задачи

При построении количественной модели электроструктурографии, позволяющей вычислять параметры патологических включений, используется потенциальное приближение. В этом случае электрическое поле в исследуемом объекте описывается потенциалом $u = \mathrm{Re}\left(\underline{U}e^{-j\omega t}\right)$, причем комплексный потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа. Свойства сред описываются комплексной диэлектрической проницаемостью $\underline{\varepsilon} = \varepsilon + j\dfrac{\gamma}{\omega}$, где ε – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды, Ф/м; γ – проводимость среды, См/м; ω – круговая частота, рад/с. Граничные условия для комплексного потенциала принимаются такими же, как и для электростатического поля [1].

Количественная модель электропрофилирования постоянным током содержит в качестве параметров потенциал электрического поля, силу тока источников, удельные проводимости сред. Тогда по известной аналогии сила тока соответствует электростатическому заряду, удельная проводимость – абсолютной диэлектрической проницаемости сред. Потенциал поля подчиняется уравнению Лапласа. Граничные условия аналогичны таковым условиям для электростатического поля [11].

Видно, что задачи электропрофилирования и электроструктурографии аналогичны и задаче о расчете электростатического поля, и одна – одной. Поэтому для построения обобщенной модели электрического зондирования используется эта аналогия. Соответственно обобщенная модель базируется на электростатической задаче. Постановка задачи такова.

Выбирается наиболее простая конфигурация основной среды и включения [1, 4]. В пространстве R^3, заполненном средой с абсолютной диэлектрической проницаемостью ε_{a1}, размещается прямоугольная декартова система координат xOy (рис. 1).

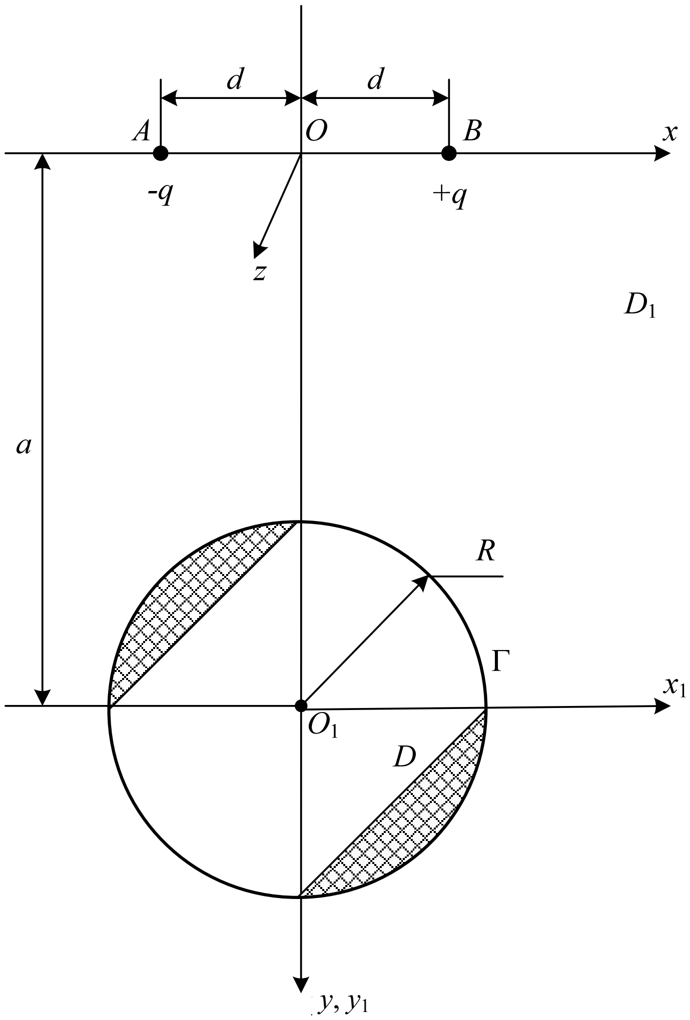

Рис. 1. Электродинамическая система для модели электрического зондирования

На оси Ox симметрично от начала координат размещены электроды, которые могут быть представлены как точечные заряды $-q$ – в точке A, $+q$ – в точке B. Координаты электродов: $x = \pm d$, $y = 0$. Расстояние между электродами нельзя считать малым. Такой источник электростатического поля по структуре аналогичен установке для электропрофилирования [3, 4]. С началом декартовой системы координат xOy связывается сферическая система координат (r, θ, φ). На расстоянии a от O размещается сфера D радиуса R с центром в точке O_1 из диэлектрического материала с абсолютной диэлектрической проницаемостью ε_{a2}. С точкой O_1 связывается сферическая система координат $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$. Введены обозначения: Г – граничная поверхность сферы D; $D_1 = R^3 / D$ – внешняя по отношению к сфере область пространства R^3.

Вводятся потенциальные функции: u_1 – потенциальная функция электростатического поля электродов; u' – потенциальная функция поля сферы в D_1; u_0 – потенциальная функция поля сферы в D. Тогда потенциальная функция поля в D_1 $u = u_1 + u'$.

Ставится краевая задача для уравнения Лапласа [1]:

– в D:

$$\Delta u_0 = 0; \tag{1}$$

– в D_1:

$$\Delta u = 0; \tag{2}$$

$$u\Big|_\Gamma = u_0\Big|_\Gamma, \ \varepsilon_{a1}\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = \varepsilon_{a2}\frac{\partial u_0}{\partial n}\Big|_\Gamma. \tag{3}$$

Условие на бесконечности $u \to 0$ при $M \to \infty$ в D_1. (4)

Решение краевой задачи

Потенциалы u_1, u', u_0 записываются в виде рядов по сферическим функциям.

Согласно [12] потенциал u_1 имеет представление в системе координат (r, θ, φ), с учетом того, что принимается $a > 2d$:

$$u_1 = \frac{2q}{r}\sum_{m=0}^{\infty} P_{2m+1}(\cos\theta)\left(\frac{d}{r}\right)^{2m+1}, \tag{5}$$

где q – заряд – источник поля; P_{2m+1} – полином Лежандра; m – счетная переменная.

В (5) заряд нормирован к $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_{a1}}$.

По [1] потенциалы u', u_0 имеют представления в системе координат $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$:

$$u' = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \left(\frac{R}{r}\right)^{k+1} P_k(\cos\theta), \ r > R; \tag{6}$$

$$u_0 = \sum_{k=0}^{\infty} y_k \left(\frac{r}{R}\right)^{k+1} P_k(\cos\theta), \ r < R, \tag{7}$$

где x_k, y_k – неизвестные коэффициенты; k – счетная переменная.

В (6) коэффициент разложения нормирован к $\frac{1}{4\pi\varepsilon_{a1}}$, в (7) – к $\frac{1}{4\pi\varepsilon_{a2}}$.

Тогда (1), (2) и (4) удовлетворяются автоматически.

Неизвестные коэффициенты в (6) и (7) находятся из граничных условий (3). Для этого потенциал u_1 (5) переразлагается по сферическим функциям в системе координат $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ с помощью теоремы сложения 202.3.3, указанной в [13]. Тогда [1]:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ x_k \left(\frac{R}{r} \right)^{k+1} + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{2m+1} S_{k,2m+1}(a) 2qd^{2m+1} r^k \right\} P_k(\cos\theta); \tag{8}$$

$$S_{k,2m+1}(a) = \frac{(k+2m+1)!}{k!(2m+1)!a^{2m+k+2}}.$$

После подстановки (7) и (8) в (3) и приравнивания коэффициентов при одинаковых гармониках $P_k(\cos\theta)$ получается бесконечная система уравнений для неизвестных коэффициентов разложения. При этом учитывается, что на Г $r = R$ и $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r}$. Для гармоники номер $k = 0 \ldots \infty$ уравнения имеют вид с учетом того, что $(-1)^{2m+1} = -1$:

$$x_k - \sum_{m=0}^{\infty} S_{k,2m+1}(a) 2qd^{2m+1} R^k = y_k; \tag{9}$$

$$\varepsilon_{a1} \frac{-(k+1)}{R} x_k - \varepsilon_{a2} y_k \frac{k}{R} = \varepsilon_{a1} \sum_{m=0}^{\infty} S_{k,2m+1}(a) 2qd^{2m+1} R^{k-1}. \tag{10}$$

Для целей электрического зондирования необходимо знать выражение потенциала u'. Таким образом, необходимо найти только коэффициенты x_k. Эти коэффициенты получаются из (9) и (10) простым исключением:

$$x_k = \frac{2q\left(\varepsilon_{a1} k R^{k-1} - \varepsilon_{a1} R^k\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} S_{k,2m+1}(a) 2qd^{2m+1}\right)}{\varepsilon_{a1} \frac{-(k+1)}{R} - \varepsilon_{a2} \frac{k}{R}}. \tag{11}$$

Вывод уравнений диагностики

Требуется составить систему алгебраических уравнений – уравнений диагностики [1]. В этой системе известными являются потенциалы в некоторых точках, в которых возможно осуществить измерения. Неизвестны здесь параметры неоднородности. В рассматриваемом случае это радиус R, глубина залегания a, абсолютная диэлектрическая проницаемость ε_{a2}. Следовательно, в системе должно быть три уравнения.

Тогда при электрическом зондировании измеряется потенциал в трех точках M_1, M_2, M_3. Удобно выбрать эти точки на оси Ox, так что $M_i(x_i, 0)$. Расположение точек показано на рис. 2. Причем $x_i > d$, так как при этом справедливо разложение (5) и дальнейшие выводы на его основе.

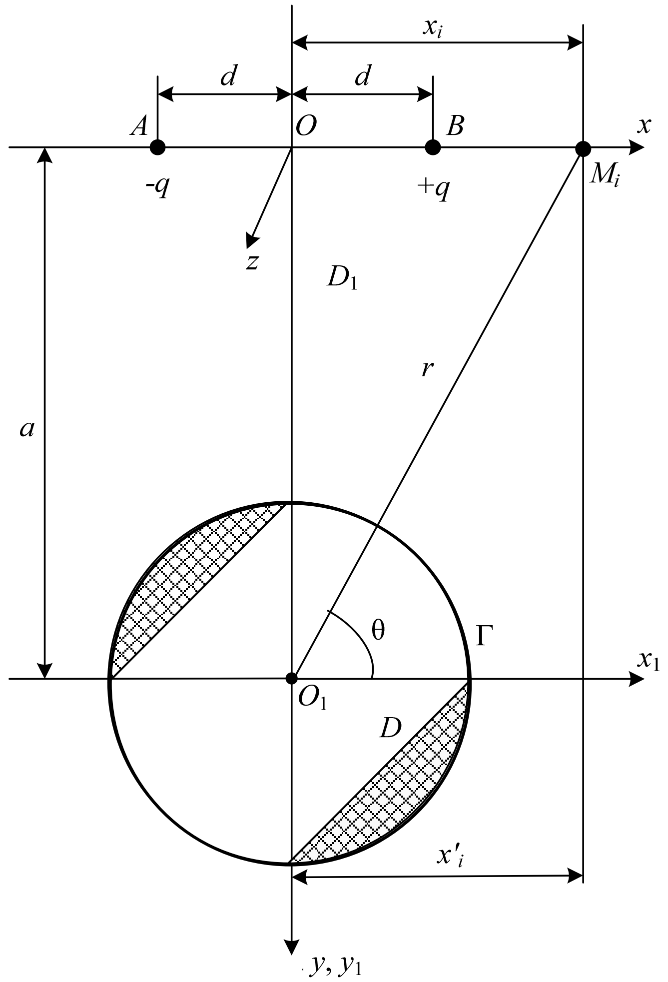

Рис. 2. Расположение точки для измерения потенциала в электрическом зондировании

Потенциал в точке M_i является суммой потенциалов поля точечных зарядов и поля, созданного диэлектрической сферой: $u(M_i)=u_1(M_i)+u'(M_i)$. Потенциал $u_1(M_i)$ вычисляется по замкнутой формуле [12]:

$$u_1(M_i)=\frac{q}{x_i-d}-\frac{q}{x_i+d}. \tag{12}$$

Тогда уравнение диагностики для точки M_i имеет характерный вид:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k\left(\frac{R}{r_u}\right)^{k+1} P_k(\cos\theta_i)=u(M_i)-u_1(M_i). \tag{13}$$

Из рис. 2 следует, что в системе координат $(r_1,\ \theta_1,\ \varphi_1)$:

$$r_i=\sqrt{a^2+x_i^2}\ ,\ \cos\theta_i=\frac{x_i}{\sqrt{a^2+x_i^2}}. \tag{14}$$

Если ограничиться значениями счетных переменных $k = 0, 1, 2$ и $m = 0, 1, 2$, то коэффициенты xk в (13) вычисляются из (11) с учетом того, что в этом случае значения полиномов Лежандра [14]:

$$P_0(\cos\theta_i) = 1;$$

$$P_1(\cos\theta_i) = \cos\theta_i = \frac{x_i}{\sqrt{a^2 + x_i^2}}; \qquad (15)$$

$$P_2(\cos\theta_i) = \frac{3}{2}\cos\theta_i^2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\frac{x_i^2}{a^2 + x_i^2} - \frac{1}{2}.$$

Полученная нелинейная система алгебраических уравнений решается численно [1], что представляет собой отдельную проблему [15].

Заключение

Разработана электродинамическая система – основанная на электростатической аналогии модель методов электрического зондирования. Поставлена и решена методом теорем сложения задача математической физики расчета потенциала электростатического поля в этой электродинамической системе. На основании этого решения получены уравнения диагностики, в которых неизвестными являются параметры неоднородности, а известными – потенциалы электростатического поля в трех точках системы. Уравнения диагностики могут быть решены численно относительно неизвестных электрофизических и геометрических параметров неоднородности, что свидетельствует о выполнении цели работы.

Необходимо отметить, что имеющаяся модель электроструктурографии [1] отличается от предложенной в статье, где неоднородность смещена относительно источников поля. В [1] источники поля и неоднородность лежат на одной прямой. Представленная автором модель охватывает большее число практических случаев, и исходя из этого применима в существенно различных областях.

Данная модель может быть распространена на более сложные случаи расположения неоднородностей различной геометрической формы путем использования имеющихся в [13] теорем сложения для решений уравнения Лапласа в тех или иных системах координат. При получении расчетных соотношений применяются сравнительно простые математические преобразования. Представляется, что такой подход дает более компактные и удобные для применения расчетные соотношения, чем частные методы, созданные для решения одной конкретной задачи.

Таким образом, можно сделать вывод, что предлагаемая модель электрического зондирования имеет несомненный теоретический интерес и значение для практических приложений в компьютерных технологиях.

Литература

1. Ерофеенко, В. Т. Основы математического моделирования / В. Т. Ерофеенко, И. С. Козловская. – Минск : БГУ, 2002. – 195 с.
2. Волобуев, А. Н. Биофизика / А. Н. Волобуев. – Самара : Самар. дом печати, 1999. – 166 с.
3. Вешев, А. В. Электропрофилирование на постоянном и переменном токе / А. В. Вешев. – М. : Недра, 1980. – 391 с.
4. Хмелевской, В. А. Электроразведка / В. А. Хмелевской. – М. : Изд-во МГУ, 1984. – 142 с.
5. Якубовский, Ю. В. Электроразведка / Ю. В. Якубовский. – М. : Недра, 1980. – 144 с.
6. Тихонов, А. П. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1986. – 286 с.

7. Шушкевич, Г. Ч. Моделирование электростатического поля заряженного кольца, расположенного внутри бесконечного цилиндра в присутствии тора / Г. Ч. Шушкевич // Информатика. – 2023. – Т. 20, № 3. – С. 61–73. – DOI 10.3.37661/1816_0301_2023_20_3_67_73
8. Шушкевич, Г. Ч. Аналитическое решение задачи экранирования электростатического поля тонкими сферическими оболочками / Г. Ч. Шушкевич // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага універсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2024. – Т. 14, № 2. – С. 130–140.
9. Ерофеенко, В. Т. Расчет электростатической индукции зарядов в многоэлектродной модели системы молниезащиты методом теорем сложения / В. Т. Ерофеенко, Д. В. Комнатный, Е. В. Комракова // Вестник Гомельского государственного технического университета имени П. О. Сухого. – 2018. – № 1 (72). – С. 70–78.
10. Комнатный, Д. В. Расчет электростатического поля ограничителей перенапряжения методом теорем сложения / Д. В. Комнатный // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 1. – С. 74–78. – DOI 10.54341/20778708_2024_1_58_74
11. Теоретические основы электротехники : в 3 т. / К. С. Демирчан, Л. Р. Нейман, Н. В. Коровкин, В. Л. Чечурин. – СПб. : Питер, 2003. – Т. 3. – 377 с.
12. Пономарев, К. К. Составление дифференциальных уравнений / К. К. Пономарев. – Минск : Выш. шк., 1973. – 560 с.
13. Ерофеенко, В. Т. Теоремы сложения / В. Т. Ерофеенко. – Минск : Наука и техника, 1989. – 254 с.
14. Ерофеенко, В. Т. Аналитическое моделирование в электродинамике / В. Т. Ерофеенко, И. С. Козловская. – Минск : БГУ, 2010. – 304 с.
15. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М. : Наука, 1987. – 598 с.

References

1. Erofeenko V. T., Kozlovskaya I. S. *The principles of mathematical modeling*. Minsk, Belorusskii gosudarstvennyi universitet, 2002. 195 p. (in Russian).
2. Volobuev A. N. *Biophysics*. Samara, Samarckii dom pechati, 1999. 166 p. (in Russian).
3. Veshev A. V. *Electrical Profiling by the direct and alternative current*. Moscow, Nedra Publ., 1980. 391 p. (in Russian).
4. Khmelevskoi V. A. *Electric prospecting*. Moscow, Moskovskii gosudarstvennyi universitet Publ., 1984. 422 p. (in Russian).
5. Yakubovskii Yu. V. *Electric prospecting*. Moscow, Nedra Publ., 1980. 144 p. (in Russian).
6. Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya. *The Methods of Incorrect Problems Solving*. Moscow, Nauka Publ., 1986. 286 p. (in Russian).
7. Shushkevich G. Ch. Modeling the electrostatic field of a charged ring located inside an infinite cylinder in presence of a torus. *Informatika = Informatics*, 2023, vol. 20, no. 3, pp. 67–73 (in Russian). DOI 10.3.37661/1816_0301_2023_20_3_67_73
8. Shushkevich G. Ch. Analytical solving for problem of electrostatic field shielding by two thin spherical shells. *Vestnik Grodnenskogo gosudarstvennogo universiteta imeni Yanki Kupaly. Seriya 2. Matematika. Fizika. Informatika, vychislitel'naya tekhnika i upravlenie*, 2024, vol. 14, no. 2, pp. 130–140 (in Russian).
9. Erofeenko V. T., Komnatnyi D. V., Komrakova E. V. Simulation the field of pulsed electric discharge channel in the presence of a spherical screen and a pin-type conductive rod using addition theorem method. *Vestnik Gomel'skogo gosudarstvennogo universiteta imeni P. O. Sukhogo*, 2018, no. 1 (72), pp. 70–78 (in Russian).
10. Komnatnyi D. V. Electrostatic field of overvoltage limiter calculation with addition theorems method. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki*, 2024, no. 1, pp. 74–78 (in Russian). DOI 10.54341/20778708_2024_1_58_74

11. Demirchan K. S., Neiman L. R., Korovkin N. V., Chechurin V. L. *The theoretical principles of electrotechnics*. Sankt-Peterburg, Piter Publ., 2003, pt. 3, 337 p. (in Russian).
12. Ponomarev K. K. *The composition of differential equations*. Minsk, Vysheishaya shkola, 1973. 560 p. (in Russian).
13. Erofeenko V. T. *Addition theorems*. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1989. 254 p. (in Russian).
14. Erofeenko V. T., Kozlovskaya I. S. *Analytical modeling in electrodynamics*. Minsk, Belorusskii gosudarstvennyi universitet, 2010. 304 p. (in Russian).
15. Bakhvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobel′kov G. M. *Numerical methods*. Moscow, Nauka Publ., 1987. 598 p. (in Russian).

Поступила 03.04.2025 г.