УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ ПУБЛИКАЦИИ (EDUCATIONAL AND METHODICAL PUBLICATIONS)

ISSN 2519-8742. Механика. Исследования и инновации. Вып. 17. Гомель, 2024

УДК 531.391

Д. В. КОМНАТНЫЙ
Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого, Гомель, Беларусь

УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ С ПРИСОЕДИНЕННЫМ МАТЕМАТИЧЕСКИМ МАЯТНИКОМ

Исследована колебательная система из весомого стержня, вращающегося вокруг горизонтальной оси, и прикрепленного к нему математического маятника, которая в некоторых случаях может быть использована для моделирования динамики цистерн с жидким грузом методом механической аналогии. С применением уравнений Лагранжа второго рода получены нелинейные дифференциальные уравнения малых колебаний такой системы. Обсуждаются способы их аналитического решения.

Ключевые слова: колебательная система, механическая аналогия, уравнения малых колебаний, метод Галеркина.

Введение. На современном железнодорожном и автомобильном транспорте широкое применение находит подвижной состав с цистернами. Исследования его динамики, ставящие целью исключение возможности аварий, имеют большое практическое значение, особенно, если учесть, что значительную долю перевозимых жидких грузов составляют опасные: газы, горючее, ядовитые вещества [1]. Наиболее общим способом исследования таких задач является рассмотрение колебаний транспортного средства на основе подходов теории колебаний твердых тел и механики жидкости [1–3]. Трудности решения уравнений гидродинамики (уравнений Навье – Стокса) вызвали появление метода упрощенного решения задач динамики цистерн методом механической аналогии [4, 5]. В результате развития этого подхода разработан ряд механических моделей колебаний жидкости в цистернах [1].

Пружинно-массовые модели, в которых движение жидкости моделируется движением пружинного маятника, соединенного с резервуаром. В [5] предложена модель в виде материальной точки, присоединенной пружинами к стенкам резервуара. В [1] используется нескольких таких маятников. В [6] предложена модель с нелинейной силой упругости пружин.

Модель в виде эквивалентного физического маятника предложена в работе [7]. В статье [1] описана модель из нескольких маятников, расположенных вертикально и связанных со стенками резервуара. В [8] представлена модель из нескольких физических маятников, совершающих вращательные движения. В статье [9] используется модель в виде сферического маятника.

Описание движения цистерны осуществляется на основе применения *многомассовых систем*. Для прогнозирования опрокидывания цистерны в [10] предложена система из двух физических маятников. В [11, 12] для анализа колебаний конструкций тяжелых жидкостных ракет-носителей использована система в виде вертикального весомого стержня, к которому прикреплены два математических маятника.

Аварийный режим движения с отрывом резервуара от платформы транспортного средства может быть выполнен путем анализа системы, состоящей из стержня, к которому прикреплен математический маятник. В данной статье получены и исследованы уравнения движения указанной системы.

Вывод уравнений движения. Рассматриваемая колебательная система изображена на рисунке 1. Для нее в качестве обобщенных координат можно принять углы отклонения стержня θ и маятника φ.

Для получения уравнений движения такой системы целесообразно использовать уравнения Лагранжа второго рода [13]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \theta}=-\frac{\partial \Pi}{\partial \theta}, \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=-\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}, \qquad (2)$$

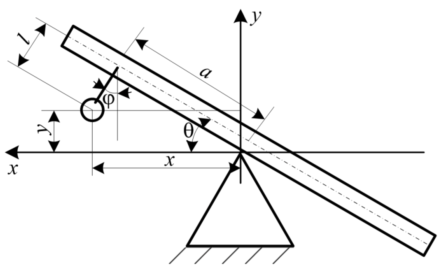

Рисунок 1 – Рассматриваемая механическая система

где t – время; T, Π – кинетическая и потенциальная энергия системы; точка над переменной соответствует дифференцированию по времени.

Кинетическая энергия системы может быть определена способом, описанным в [13]. Из рисунка 1 следует, что координаты x, y математического маятника выражаются формулами

$$x = a\cos\theta + l\sin\varphi\,;\;\; y = a\sin\theta - l\cos\varphi\,,$$

где a – расстояние от оси вращения стержня до места крепления маятника; l – длина нити маятника.

Квадрат линейной скорости маятника

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2al\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin(\varphi-\theta)\,.$$

Кинетическая энергия системы получается суммированием энергий стержня и маятника

$$T=\left[\frac{I+ma^2}{2}\right]\dot{\theta}^2+\frac{m}{2}\left[l^2\dot{\varphi}^2+2al\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\left(\varphi-\theta\right)\right], \tag{3}$$

где I – момент инерции стержня относительно оси вращения; m – масса груза математического маятника.

Принимая за начало отсчета положение, при котором стержень горизонтален, а нить маятника вертикальна, в соответствии с рисунком 1 получаем выражение потенциальной энергии

$$\Pi=mg\left(a\sin\theta+l\left(1-\cos\varphi\right)\right), \tag{4}$$

где g – ускорение свободного падения, м/с^2.

После подстановки (3) и (4) в (1) и (2) а также выполнения необходимых преобразований получаем уравнения движения системы:

$$\left[I+ma^2\right]\ddot{\theta}+mal\ddot{\varphi}\sin\left(\varphi-\theta\right)+mal\dot{\varphi}^2\cos\left(\varphi-\theta\right)=-mga\cos\theta. \tag{5}$$

$$ml^2\ddot{\varphi}+mal\ddot{\theta}\sin\left(\varphi-\theta\right)-mal\dot{\theta}^2\cos\left(\varphi-\theta\right)=-mgl\sin\varphi. \tag{6}$$

Уравнения (5) и (6) являются существенно нелинейными. Для дальнейшего анализа примем, что углы φ и θ малы. В таком случае уравнения упрощаются по [13]: $\sin(\varphi-\theta)\approx\varphi-\theta$; $\cos(\varphi-\theta)\approx 1$; членами, содержащими квадраты производных, пренебрегаем. В результате подстановки получаем:

$$\left[I+ma^2\right]\ddot{\theta}+mal\ddot{\varphi}\left(\varphi-\theta\right)+mga\theta=0. \tag{7}$$

$$ml^2\ddot{\varphi}+mal\ddot{\theta}\left(\varphi-\theta\right)+mgl\varphi=0. \tag{8}$$

Но и уравнения (7), (8) остаются нелинейными, что требует использования соответствующих методов их решения.

Решение уравнений движения. Для решения системы нелинейных уравнений второго порядка в [14] рекомендуется метод Пуанкаре, в котором требуется вводить малый параметр, но в этом же источнике нет никакого указания на его порядок малости. Решение этим методом получается в виде ряда, исследование которого на сходимость представляет собой нетривиальную задачу и зачастую не проводится. При решении технических задач используется, как правило, только первое приближение. Насколько оно отличается от точного решения, остается неизвестным. Полученные методом Пуанкаре решения технических задач оказываются правдоподобными, однако они могут оказаться недостаточными для анализа безопасности движения транспортных средств.

Описанный в [15] метод Галеркина не требует введения малого параметра, поэтому его использование представляется целесообразным для решения уравнений (7), (8). Следуя [15], они преобразуются в систему дифференциальных уравнений первого порядка путем введения вспомогательных переменных α и β:

$$\frac{d\theta}{dt} = \alpha\,; \; \frac{d\varphi}{dt} = \beta\,,$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{mga}{I + ma^2}\theta - \frac{mal}{I + ma^2}(\varphi - \theta)\frac{d\beta}{dt}\,; \; \frac{d\beta}{dt} = -\frac{g}{l}\varphi - \frac{a}{l}(\varphi - \theta)\frac{d\alpha}{dt}\,.$$

Решение системы ищется в виде ряда Фурье. На практике возможно удержание только нескольких членов ряда, например,

$$\theta = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \sin \omega_1 t + A_3 \cos 3\omega_1 t + A_4 \sin 3\omega_1 t\,;$$

$$\varphi = B_1 \cos \omega_2 t + B_2 \sin \omega_2 t + B_3 \cos 3\omega_2 t + B_4 \sin 3\omega_2 t\,.$$

Чтобы отыскать фигурирующие в данных выражениях коэффициенты, подстановкой предполагаемых решений в первые два уравнения системы получают соотношения для вспомогательных переменных, которые затем подставляют в оставшиеся два уравнения. Методом тригонометрической коллокации [15] получаются алгебраические уравнения, позволяющие найти неизвестные в предполагаемом решении. Таким образом, метод Галеркина позволяет аналитически учесть только основную гармонику и небольшое число высших гармоник. Полученное этим методом решение является приближенным, уточнение решения затруднено большим объемом вычислений. Вопрос об устойчивости полученного решения в рамках метода Галеркина не решается и представляет собой самостоятельную проблему [15].

Заключение. Анализ уравнений (5)–(8) движения рассмотренной системы, включающей стержень с прикрепленным математическим маятником, дает основание заключить, что колебания этой системы являются существенно нелинейными. Для практических приложений аналитический расчет параметров движения такой системы удобно осуществлять методом Галеркина, не требующим введения малого параметра. Этим методом могут быть получены приближенные или оценочные решения, так как практически реализовать можно только решения с небольшим числом членов ряда Фурье, которым представляется решение. Для уточненных расчетов движения системы возникает необходимость использования численных методов [1].

Выполненный анализ может быть полезен при изучении методов решения задач динамики систем с несколькими степенями свободы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Высоцкий, М. С.** Динамика автомобильных и железнодорожных цистерн / М. С. Высоцкий, Ю. М. Плескачевский, А. О. Шимановский. – Минск : Белавтотракторостроение, 2006. – 320 с.

2 **Богомаз, Г. И.** Динамика железнодорожных вагонов-цистерн / Г. И. Богомаз. – Киев : Наукова думка, 2004. – 224 с.

3 **Кузнецова, М. Г.** Анализ подходов к моделированию колебаний ньютоновских и неньютоновских жидкостей в замкнутых резервуарах / М. Г. Кузнецова // Механика. Исследования и инновации. – 2016. – Вып. 9. – С. 67–77.

4 **Моисеев, Н. Н.** Движение тел, имеющих полости, частично заполненные идеальной капельной жидкостью / Н. Н. Моисеев // Доклады АН СССР. – 1952. – Т. 85, № 4. – С. 125–138.

5 **Graham, E. W.** The characteristics of fuel motion which affect airplane dynamics / E. W. Graham, A. M. Rodriges // Journal of Applied Mechanics. – 1952. – Vol. 19, no. 3. – P. 381 –388.

6 **Кузнецова, М. Г.** Компьютерное моделирование динамики машины с навесным резервуаром для жидкости / М. Г. Кузнецова, М. А. Бойкачев // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – Вып. 12. – С. 134–139.

7 **Graham, E. W.** The forces produced by fuel oscillations in a rectangular tank : Technical Report SM-13748 / E. W. Graham. – Santa Monica : Douglas Aircraft Company, 1959. – 111 p.

8 **Mariotta, G.** Directional stability of articulated tank vehicles. A simplified model / G. Mariotta // International Journal of Heavy Vehicle Systems. – 2003. – Vol. 10, no. 1–2. – P. 144–165.

9 **Kana, D. D.** Validated spherical pendulum model for rotary liquid slosh / D. D. Kana // Journal of Spacecraft and Rockets. – 1989. – Vol. 26, no. 3. – P. 188–195.

10 **Ibrahim, R. A.** Recent advances in liquid sloshing dynamics / R. A. Ibrahim, V. N. Pilipchuk, T. Ikeda // Applied Mechanics Reviews. – 2001. – Vol. 54, no. 7. – P. 193–199.

11 **Колесников, К. С.** Жидкостная ракета, как объект регулирования / К. С. Колесников. – М. : Машиностроение. – 1969. – 298 с.

12 **Колесников, К. С.** Динамика ракет / К. С. Колесников. – М. : Машиностроение. – 1980. – 376 с.

13 Теоретическая механика. Динамика. Практикум : учеб. пособие в 2 ч. Ч. 2. Динамика материальной системы. Аналитическая механика / В. А. Акимов [и др.]. – Минск : Новое знание, 2010. – 836 с.

14 **Блехман, И. И.** Синхронизация динамических систем / И. И. Блехман. – М. : Наука, 1971. – 896 с.

15 **Горяченко, В.** Д. Основы теории колебаний / В. Д. Горяченко. – М. : Высш. шк., 2001. – 395 с.

D. V. KOMNATNY
Gomel State Technical University named by P. O. Sukhoi, Gomel, Belarus

OSCILLATIONS EQUATIONS OF A ROD WITH AN ATTACHED MATHEMATICAL PENDULUM

An oscillatory system consisting of a heavy rod rotating around a horizontal axis and a mathematical pendulum attached to it is investigated. In some cases, this system can be used to model the dynamics of tanks with liquid cargo using the mechanical analogy method. Using the Lagrange equations of the second kind, nonlinear differential equations of small oscillations of such a system are obtained. Methods for their analytical solution are discussed.

Keywords: oscillatory system, mechanical analogy, equations of small oscillations, Galerkin method.

Получено 16.05.2024