ВЫЧИСЛЕНИЯ УЛУЧШЕННОГО СТЕПЕННОГО И ЦИКЛИЧЕСКОГО ГРАФОВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП1

حساب القدرة المحسنة والرسوم البيانية الدورية للمجموعات المحدودة 1

Купцова Яна Александровна
Магистрант
ГГУ им. Ф. Скорины

научный руководитель
الشرف العلمي

Мурашко Вячеслав Игоревич
к. ф.-м. н., доцент кафедры алгебры и геометрии
ГГУ им. Ф. Скорины

Аннотация: *В работе разработаны функции для вычисления множеств вершин и ребер улучшенных степенных и циклических графов конечных групп в системе компьютерной алгебры GAP.*

Ключевые слова: *конечная группа, циклическая группа, циклический граф, улучшенный степенной граф, система компьютерной алгебры GAP.*

يانا ألكسندروفنا كويتسوفا
طالبة ماجستير بجامعة فرانسيسك سكارينا الحكومية في غوميل

الخلاصة : في هذه الورقة، تم تطوير وظائف لحساب مجموعات الرؤوس والحواف للقوة المحسنة والرسوم البيانية الدورية للمجموعات المحدودة في نظام الجبر الحاسوبي GAP.

الكلمات المفتاحية : المجموعة المحدودة، المجموعة الدورية، الرسم البياني الدوري، الرسم البياني للقوى المحسّن، نظام الجبر الحاسوبي GAP.

د. فياتشيسلاف ايجوريفيتش موراشكو
أستاذ مشارك في قسم الجبر والهندسة بجامعة فرانسيسك سكارينا الحكومية في غوميل

Введение

В данной работе рассматриваются только конечные группы, для изучения которых используется графовый метод, позволяющий анализировать структуру группы по свойствам сопоставляемого ей графа. Объектами нашего исследования являются улучшенный степенной и циклический графы группы G. Впервые улучшенный степенной граф был упомянут в работе [1], а циклический граф в работе [2]. Кроме того, рассматриваемые графы и их свойства изучались в работах [3-5]. Целью данной работы является разработка функций для вычисления множеств вершин и ребер улучшенных степенных и циклических графов конечных групп в системе компьютерной алгебры GAP.

Результаты и обсуждение

Напомним, что группа, порождённая одним элементом, называется циклической.

Определение [5]. Улучшенным степенным графом группы G называется простой неориентированный граф, вершинами которого являются элементы множества $G \setminus \{1\}$ и две вершины x и y соединены ребром тогда и только тогда, когда группа $\langle x, y\rangle$, порождённая элементами x и y, является циклической.

Для более детального изучения свойств улучшенного степенного графа на языке программирования GAP были разработаны функции для построения такого графа.

1. Функция VerticesEP(G) возвращает множество вершин улучшенного степенного графа, позволяя, в частности, определить их количество.
2. Функция EdgesEP(G) возвращает список рёбер улучшенного степенного графа, позволяя, в частности, определить их количество.

Для демонстрации применения представленных функций в таблице 1 приведены результаты времени их выполнения для задач, связанных с вычислением вершин и ребер улучшенного степенного графа для различных групп. Время выполнения указано в секундах и получено с использованием GAP 4.11.0 на ноутбуке с процессором Intel(R) Core(TM) i7-4702MQ CPU @ 2.20GHz 2.20 GHz с 10 ГБ оперативной памяти.

Таблица 1 – Результаты действия функций 1 и 2/2

Группа/المجموعة	Порядок / الترتيب	Функция VerticesEP دالة القمم EP Время/ الزمن	Число вершин عدد الرؤوس	Функция EdgesEP دالة الحوافEP Время/ الزمن	Число ребер عدد الاضلاع
S_6	720	0,000001	719	5,719	2325
S_3 x (C_{25} : C_8)	1200	0,015	1199	50,579	68475
C_9 : (C_{25} : D_8)	1800	0,031	1799	99,454	124650

Определение [6]. Циклическим графом группы G называется простой граф, вершинами которого являются элементы множества $G \setminus \mathrm{Cyc}(G)$, где

$$\mathrm{Cyc}(G) = \{y \in G \mid \langle x, y\rangle \text{ является циклической } \forall\, x \in G\}$$

и две вершины x и y соединены ребром тогда и только тогда, когда группа $\langle x, y\rangle$, порождённая элементами x и y, является циклической. Согласно [7] $\mathrm{Cyc}(G)$ является нормальной подгруппой группы G.

Заметим, что циклический граф является порождённым подграфом улучшенного степенного графа на множестве вершин.

Для более детального изучения свойств циклического графа на языке программирования GAP были разработаны функции, которые позволяют построить данный граф.

3. Функция CycG(G) возвращает нормальную подгруппу Cyc(G), которая состоит из элементов, удовлетворяющих условию цикличности.
4. Функция VerticesCyclic(G) возвращает множество вершин циклического графа, позволяя, в частности, определить их количество.
5. Функция EdgesCyclic(G) возвращает список рёбер циклического графа, позволяя, в частности, определить их количество.

Для наглядного представления работы функций 3-5 в таблице 2 указаны результаты по времени их выполнения для различных групп.

Таблица 2 – Результаты действия функций 3-5.

Группа/المجموعة	Порядок / الترتيب	Функция CycG CycG دالة Время/ الزمن	Функция VerticesCyclic دالة الرؤوس الدائرية Время/ الزمن	Число вершин عدد الرؤوس	Функция EdgesCyclic دالة الحواف الدائرية Время/ الزمن	Число ребер عدد الاضلاع
S_6	720	0,218	0,235	719	5,187	1606
S_3 x (C_{25} : C_8)	1200	4,172	4,156	1196	53,204	64435
C_9 : (C_{25} : D_8)	1800	6,360	6,234	1798	97,375	121953

Заключение

Для углубленного изучения улучшенных степенных и циклических графов конечных групп на языке программирования GAP были разработаны функции VerticesEP(G), EdgesEP(G), CycG(G), VerticesCyclic(G) и EdgesCyclic(G). Данные функции позволяют проанализировать структуру и свойства рассматриваемых графов. Кроме того, они могут использоваться в исследовании свойств улучшенных степенных и циклических графов для построения примеров и контрпримеров. Дальнейшие исследования будут сосредоточены на изучении новых свойств улучшенных степенных и циклических графов и повышении эффективности разработанных функций.

المقدمة

في هذه الورقة، تم النظر فقط في المجموعات المحدودة، والتي تم استخدام طريقة الرسم البياني لدراستها، والتي تسمح بتحليل بنية المجموعة بناءً على خصائص الرسم البياني المرتبطة بها. أهداف دراستنا هي الرسم البياني للقدرة المحسنة والرسم البياني الدوري للمجموعة G. تم ذكر الرسم البياني للقدرة المحسنة لأول مرة في [1]، والرسم البياني الدوري في [2]. بالإضافة إلى ذلك، تمت دراسة الرسوم البيانية قيد النظر وخصائصها في [3-5]. يهدف هذا العمل إلى تطوير وظائف لحساب مجموعات الرؤوس والحواف للقدرة المحسنة والرسوم البيانية الدورية للمجموعات المحدودة في نظام الجبر الحاسوبي GAP.

النتائج والمناقشة

لنتذكر أن المجموعة التي تم إنشاؤها بواسطة عنصر واحد تسمى دورية.

التعريف [5]. الرسم البياني المحسن للقوى لمجموعة G هو رسم بياني غير موجه بسيط تكون رؤوسه عناصر المجموعة $G \setminus \{1\}$ ويتم توصيل رأسين x و y بواسطة حافة إذا وفقط إذا كانت المجموعة x ، y الناتجة عن العنصرين $\langle x, y\rangle$ دورية.

لدراسة خصائص الرسم البياني للقدرة المحسنة بشكل أكثر تفصيلاً، تم تطوير وظائف لبناء مثل هذا الرسم البياني في لغة البرمجة GAP.

1. تقوم الدالة رؤوس EP(G) بإرجاع مجموعة رؤوس الرسم البياني للقوة المحسّنة، مما يسمح، على وجه الخصوص، بتحديد عددها.
2. تقوم الدالة حواف(EP(G بإرجاع قائمة من حواف الرسم البياني للقوة المحسنة، مما يسمح، على وجه الخصوص، بتحديد عددها.

ولإثبات تطبيق الوظائف المقدمة، يوضح الجدول 1 نتائج وقت تنفيذها للمهام المتعلقة بحساب رؤوس وحواف الرسم البياني للقوة المحسنة لمجموعات مختلفة. يتم إعطاء أوقات التنفيذ بالثواني وتم الحصول عليها باستخدام GAP 4.11.0 على كمبيوتر محمول مزود بمعالج وحدة المعالجة المركزية Intel(R) Core(TM) i7-4702MQ بسرعة 2.20 جيجاهرتز مع 10 جيجابايت من ذاكرة الوصول العشوائي.

الجدول 1 - نتائج الدالتين 1 و2/2

التعريف [6]. الرسم البياني الدائري للمجموعة G هو رسم بياني بسيط تكون رؤوسه عناصر المجموعة $G \setminus \mathrm{Cyc}(G)$, حيث

$$\mathrm{Cyc}(G) = \{y \in G \mid \langle x, y\rangle \text{ هو دوري } \forall\, x \in G\}$$

ويتم ربط الرأسين x وy بواسطة حافة إذا وفقط إذا كانت المجموعة $\langle x, y\rangle$ الناتجة عن العنصرين x وy دائرية. وفقًا لـ [7]، Cyc(G) هي مجموعة فرعية طبيعية من G.

لاحظ أن الرسم البياني الدوري هو رسم بياني فرعي مستحث للرسم البياني المحسن لقانون القوة على مجموعة الرؤوس.

من أجل دراسة أكثر تفصيلاً لخصائص الرسم البياني الدوري، تم تطوير وظائف في لغة البرمجة GAP والتي تسمح بإنشاء هذا الرسم البياني.

3. تقوم الدالة CycG(G) بإرجاع المجموعة الفرعية الطبيعية Cyc(G) التي تتكون من عناصر تلبي شرط الدورية.
5. تقوم الدالة رؤوس دائرية(G) بإرجاع مجموعة رؤوس الرسم البياني الدائري، مما يسمح، على وجه الخصوص، بتحديد عددها.
3. تقوم الدالة حواف دائرية(G) بإرجاع قائمة من حواف الرسم البياني الدائري، مما يسمح، على وجه الخصوص، بتحديد عددها.

للحصول على تمثيل واضح لعملية الوظائف من 3 إلى 5، يوضح الجدول 2 النتائج الخاصة بوقت تنفيذها لمجموعات مختلفة.

الجدول 2 - نتائج الوظائف 3-5.

الخاتمة

لاستكشاف المزيد من القدرة المحسنة والرسوم البيانية الدورية للمجموعات المحدودة، تم تطوير الوظائف رؤوس EP(G)، و حواف(EP(G، وCycG(G)، و رؤوس دائرية(G)، و حواف دائرية(G) في لغة البرمجة GAP. تسمح لك هذه الوظائف بتحليل بنية وخصائص الرسوم البيانية قيد النظر. بالإضافة إلى ذلك، يمكن استخدامها في دراسة خصائص الطاقة المحسنة والرسوم البيانية الدورية لبناء الأمثلة والأمثلة المضادة. وسوف تركز الأبحاث المستقبلية على استكشاف خصائص جديدة للقدرة المحسنة والرسوم البيانية الدورية وتحسين كفاءة الوظائف المطورة.

Литература المراجع والمصادر

1. Aalipour G., Akbari S., Cameron P. J., Nikandish R., Shaveisi F. On the structure of the power graph and the enhanced power graph of a group // Electron. J. Comb. - 2017. - Vol. 24, №3. - p. 316.
2. Imperatore D. On a graph associated with a group // Ischia Group Theory. - 2009. - p. 100-115.
3. Bera S., Bhuniwya A.K. On enhanced power graphs of finite groups // J. Algebra Its Appl. - 2018. - Vol.17, № 8. - p. 1850146.
4. Imperatore D., Lewis M.L. A condition in finite solvable groups related to cyclic subgroups // Bull. Aust. Math. Soc. - 2011. - Vol.83, № 2. - p. 267-272.
5. Costanzo D. G., Lewis M. L., Schmidt S., Tsegaye E., Udell G. The cyclic graph (deleted enhanced power graph) of a direct product // Involve, a Journal of Mathematics. - 2021. - Vol. 14, № 1. - p. 167-179.
6. Ma X. L., Wei H. Q., Zhong G. The cyclic graph of a finite group //Algebra. - 2013. - Vol. 2013, №. 1. - p. 107265.
7. O'Bryant K, Patrick D, Smithline L, Wepsic E. Some facts about cycels and tidy groups // Mathematical Sciences Technical Reports. - 1992. - p. 1-7.