УДК 539.12

АЛГЕБРА МАТРИЦ ДИРАКА В СЛУЧАЕ РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ $d \neq 4$

В. Ю. Гавриш, А. Д. Тамков

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь

Кратко изложена методика расчета произведений матриц Дирака в случае размерности пространства-времени $d \neq 4$, используемая в прикладных квантово-полевых расчетах. Показано, что антикоммутационное соотношение может быть использовано для расчета сверток любого числа матриц Дирака.

Ключевые слова: размерность пространства-времени, матрица Дирака, квантовая электродинамика.

DIRAC'S MATRIX ALGEBRA IN $d \neq 4$ SPACE-TIME DIMENSION

A. D. Tamkov, V. Yu. Haurysh

Sukhoi State Technical University of Gomel, the Republic of Belarus

The work briefly describes the methodology for Dirac matrices product calculation in the case of space-time dimension $d \neq 4$, used in quantum field theory applications. It is shown that the anticommutation relation can be used for any number of Dirac matrices product calculation.

Keywords: space-time dimension, Dirac matrix, QED.

Известно [1, 2], что квантовая электродинамика (далее – КЭД) успешно описывает взаимодействие фотонов с электронами. Однако прямые расчеты КЭД в высших порядках теории возмущений невозможны в силу наличия расходимостей. Указанная особенность привела к разработке специальных методов расчета, в том числе для вычисления произведений матриц Дирака.

Работа носит методический характер: изложены элементарные соотношения для расчета произведений матриц Дирака в случае размерности пространства-времени $d \neq 4$, используемые в прикладных задачах КЭД [3, 4]. Авторами показано, что базового антикоммутационного соотношения достаточно для указанных выкладок.

Случай размерности пространства-времени $d \neq 4$. Ниже определим основные соотношения алгебры матриц Дирака [3]. Известно, что в случае размерности пространства-времени $d = 4$ комбинации $\gamma^{\mu}\hat{A}_1\hat{A}_2...\gamma_{\mu}$, где $\hat{A}_i = (A_{\alpha}\gamma^{\alpha})_i$ – свертка 4-вектора A_{α} с матрицами Дирака, используются для расчета процессов КЭД в различных порядках теории возмущений. Для обобщения случая $d \neq 4$ будем использовать базовое антикоммутационное соотношение

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2g^{\mu\nu}, \qquad (1)$$

которое должно выполняться для любой размерности пространства-времени. Из соотношения (1) определим значение $\gamma_{\mu}\gamma^{\mu}$:

$$\gamma^{\mu}\gamma_{\mu} = \gamma^{\mu}g_{\mu\nu}\gamma^{\nu} = g_{\mu\nu}\left(2g^{\mu\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right) = 2g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} - \gamma_{\mu}\gamma^{\mu}, \qquad (2)$$

откуда $\gamma^{\mu}\gamma_{\mu} = g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$, или с учетом структуры метрического тензора [2, 3] окончательно получаем $\gamma^{\mu}\gamma_{\mu} = d$. Последнее соотношение будет использовано ниже для расчета конструкций $\gamma^{\mu}\hat{A}_1\hat{A}_2...\gamma_{\mu}$ в случае $\gamma^{\mu}\gamma_{\mu} = d \neq 4$.

Вычисление сверток матриц Дирака. В разделе вычислим конструкции вида $\gamma^{\mu}\hat{A}_1\hat{A}_2...\gamma_{\mu}$ с использованием соотношений (1), (2). Для конструкции вида $\gamma_{\mu}\hat{A}\gamma^{\mu}$ получаем:

$$\gamma^{\mu}\hat{A}\gamma_{\mu} = A_{\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma_{\mu} = A_{\nu}\left(2g^{\mu\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right)\gamma_{\mu} = 2A_{\nu}g^{\mu\nu}\gamma_{\mu} - A_{\nu}\gamma^{\nu}\underbrace{\gamma^{\mu}\gamma_{\mu}}_{d} = 2\hat{A} - \hat{A}d = \hat{A}\left(2-d\right). \quad (3)$$

Отметим, что если ответ выражения (3) записать в виде $\hat{A}\left(2-d\right) = -2\hat{A} + (4-d)\hat{A}$, то при $d = 4$ получаем известное соотношение $\gamma^{\mu}\hat{A}\gamma_{\mu} = -2\hat{A}$ [2].

По аналогии определим $\gamma_{\mu}\hat{A}_1\hat{A}_2\gamma^{\mu}$:

$$\gamma^{\mu}\hat{A}_1\hat{A}_2\gamma_{\mu} = \gamma^{\mu}\hat{A}_1(2\left(A_2\right)_{\mu} - \gamma_{\mu}\hat{A}_2) = 2\hat{A}_2\hat{A}_1 - \gamma^{\mu}\hat{A}_1\gamma_{\mu}\hat{A}_2 =$$

$$= 2\hat{A}_2\hat{A}_1 - 2\hat{A}_1\hat{A}_2 + d\ \hat{A}_1\hat{A}_2. \quad (4)$$

Соотношение (4) может быть записано в виде:

$$\gamma^{\mu}\hat{A}_1\hat{A}_2\gamma_{\mu} = 2\hat{A}_2\hat{A}_1 - 2\hat{A}_1\hat{A}_2 + d\ \hat{A}_1\hat{A}_2 = 4\left(A_1\cdot A_2\right) + (d-4)\hat{A}_1\hat{A}_2, \quad (5)$$

что соответствует $\gamma^{\mu}\hat{A}_1\hat{A}_2\gamma_{\mu} = 4\left(A_1\cdot A_2\right)$ для случая размерности пространства-времени $d = 4$.

Наконец вычислим комбинацию $\gamma^{\mu}\hat{A}_1\hat{A}_2\hat{A}_3\gamma_{\mu}$, которая достаточно часто используется при расчетах однопетлевых поправок КЭД. По аналогии с (3), (4) заметим, что

$$\gamma^{\mu}\hat{A}_1\hat{A}_2\hat{A}_3\gamma_{\mu} = \left(A_1\right)_{\nu}\left(A_2\right)_{\rho}\left(A_3\right)_{\sigma}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma_{\mu} = \left(A_1\right)_{\nu}\left(A_2\right)_{\rho}\left(A_3\right)_{\sigma}\left(\left(2g^{\mu\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right)\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma_{\mu}\right) =$$

$$= \left(A_1\right)_{\nu}\left(A_2\right)_{\rho}\left(A_3\right)_{\sigma}\left(2\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\underbrace{\gamma^{\mu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma_{\mu}}_{T^{\rho\sigma}}\right), \quad (6)$$

где тензор $T^{\rho\sigma}$ вычисляется аналогично выражению (5). С учетом последнего для тензора $T^{\rho\sigma}$ получаем:

$$T^{\rho\sigma} = 4g^{\rho\sigma} + (d-4)\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}, \quad (7)$$

откуда выражение (6) упростится до

$$\gamma^{\mu}\hat{A}_1\hat{A}_2\hat{A}_3\gamma_{\mu} = \left(A_1\right)_{\nu}\left(A_2\right)_{\rho}\left(A_3\right)_{\sigma}\left(2\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\left(4g^{\rho\sigma} + (d-4)\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\right)\right) =$$

$$= \left(A_1\right)_{\nu}\left(A_2\right)_{\rho}\left(A_3\right)_{\sigma}\left(2\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^{\nu} - 4g^{\rho\sigma}\gamma^{\nu} - (d-4)\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\right). \quad (8)$$

Для придания компактной формы выражения (8) запишем слагаемое $2\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^{\nu}$ в следующем виде:

$$2\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^{\nu} = 2\left(2g^{\rho\sigma} - \gamma^{\sigma}\gamma^{\rho}\right)\gamma^{\nu} = 4g^{\rho\sigma}\gamma^{\nu} - 2\gamma^{\sigma}\gamma^{\rho}\gamma^{\nu}; \tag{9}$$

с учетом (7)–(9) для (6) окончательно получаем:

$$\gamma^{\mu}\hat{A}_1\hat{A}_2\hat{A}_3\gamma_{\mu} = \left(A_1\right)_{\nu}\left(A_2\right)_{\rho}\left(A_3\right)_{\sigma}\left(4g^{\rho\sigma}\gamma^{\nu} - 2\gamma^{\sigma}\gamma^{\rho}\gamma^{\nu} - 4g^{\rho\sigma}\gamma^{\nu} - (d-4)\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\right) =$$

$$= -2\hat{A}_3\hat{A}_2\hat{A}_1 - \left(d-4\right)\hat{A}_1\hat{A}_2\hat{A}_3. \tag{10}$$

Отметим, что в случае размерности пространства-времени $d = 4$ выражение (10) упростится до $\gamma^{\mu}\hat{A}_1\hat{A}_2\hat{A}_3\gamma_{\mu} = -2\hat{A}_3\hat{A}_2\hat{A}_1$, что совпадает с известным выражением [4, 5]. Полученные в разделе выражения могут быть использованы для расчета произведений γ – матриц Дирака, в том числе с матрицей γ_5.

В работе представлены элементарные соотношения из алгебры матриц Дирака для случая размерности пространства-времени $d \neq 4$. Полученные в работе соотношения могут быть использованы как при расчете поляризации вакуума, так и для других расчетов поправок в вершинную функцию.

Литература

1. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : в 10 т. Т. 4. Квантовая электродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 3-е изд. испр. – Москва : Наука, 1989. – 728 с.
2. Пенскин, М. Введение в квантовую теорию поля / М. Пескин, Д. Шредер. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 784 с.
3. Romao, J. C. Modern techniques for one-loop calculation / J. C. Romao. – Departamento de Fisica, Instituto Superior Tecnico, Portugal, 2004. – 81 p.
4. Grozin, A. Lectures on QED and QCD: practical calculation and renormalization of one- and multi-Loop feynman diagrams / A. Grozin // World Scientific Publishing Company, 2007. – 236 p.
5. Ахиезер, А. И. Квантовая электродинамика / А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий. – 4-е изд., перераб. – Москва : Наука, 1981. – 432 с.

УДК 539.12

РАСЧЕТ ОДНОПЕТЛЕВОГО ИНТЕГРАЛА ЭЛЕКТРОННОЙ ЛИНИИ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

В. Ю. Гавриш, А. Д. Тамков

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь

Кратко продемонстрирована методика расчета петлевых интегралов квантовой электродинамики на примере однопетлевой диаграммы электронной линии. Показано, что процедура параметризации Фейнмана с последующей размерной регуляризацией может быть использована для подобных вычислений.

Ключевые слова: квантовая электродинамика, петлевой интеграл, параметризация Фейнмана, размерная регуляризация.