Асимметрии A_{+d}, A_{-d}, $A_{-d}^{\pi^+-\pi^-}$ определяют $\left(\Delta u_V + \Delta d_V\right)$ и $\left(\Delta s + \Delta\bar{s}\right)$ без дополнительных измеряемых величин, например, a_8.

Литература

1. Forte, S. Polarized parton distribution from charged – current deep-inelastic scattering and future neutrino factories / S. Forte, M. L. Mangano, G. Ridolfi // Nucl. Phys. – 2001. – Vol. B602. – P. 585–621.
2. King, B. J. High rate neutrino detectors for neutrino factories / B. J. King // Nucl. Instrum. Meth. – 2000. – Vol. A451. – P. 198–206.
3. Bonesini, M. Perspectives for Muon Colliders and Neutrino Factories / M. Bonesini // Frascati Phys. Ser. – 2016. – Vol. 11. – P. 11–16.
4. Kaplan, D. M. Muon colliders and Neutrino Factories / D. M. Kaplan // Eur. Phys. J. Web. Conf. – 2015. – Vol. 95. – P. 03019.
5. Prospects of Heavy Neutrino Searches at Future Lepton Colliders / S. Banerjee, P. S. Bhupal Dev, A. Jbarra [et al.] // Phys. Rev. – 2015. – Vol. D92. – P. 075002.

УДК 539.12

НОВОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ $_3F_2(1)$

В. И. Лашкевич, А. А. Садовский, О. П. Соловцова

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь

Получено новое представление для обобщенной гипергеометрической функции $_3F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}, \frac{3}{2}+z; 1\right)$, *которое позволяет сделать аналитическое продолжение этой функции в левую полуплоскость. Это выражение может использовано при вычислении интегралов по теореме Коши о вычетах.*

Ключевые слова: гипергеометрическая функция, аналитическое продолжение.

NEW EXPRESSION FOR HYPERGEOMETRIC FUNCTION $_3F_2(1)$

V. I. Lashkevich, A. A. Sadouski, O. P. Solovtsova

State Technical University named after P. O. Sukhoi, the Republic of Belarus

A new representation is obtained for the generalized hypergeometric function $_3F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}, \frac{3}{2}+z; 1\right)$, *which allows us to make an analytical continuation of this function into the left half-plane. This expression can be used when calculating integrals using Cauchy's theorem on residues.*

Keywords: hypergeometric function, analytic continuation.

Мотивация. При решении ряда задач квантовой теории поля с использованием интегрального представления Меллина–Барнса возникает необходимость аналитического продолжения подынтегральной функции из одной полуплоскости в другую с последующим нахождением полюсов и применением теоремы Коши о вычетах. При таком переходе, если, например, в подынтегральном выражении содержится полигамма-функция $\psi^{(1)}(z)$, то используется соотношение, упрощающее такой переход: при отрицательном аргументе $\psi^{(1)}(z)$ удобно воспользоваться выражением

$$\psi^{(1)}(z) = -\psi^{(1)}(-z) + \frac{1}{z^2} + \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)},$$

где $\psi^{(1)}(-z = n)$ не имеет особенностей при положительных аргументах.

Для аналитического продолжения гипергеометрической функции ${}_2F_1(a, b, c; 1)$ удобно воспользоваться формулой

$${}_2F_1\left(a,b;c;1\right) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad c \neq 0,\ -1,\ -2, ..., \mathrm{Re}(c-a-b)>0.$$

Приведенные выши соотношения мы успешно применяли при нахождении аналитических выражений для вкладов в аномальный магнитный момент лептонов a_L от поляризации вакуума лептонными петлями. В задаче, связанной с вычислением вкладов в a_L от поляризации вакуума от диаграмм смешанного типа (лептонная петля с фотонными вставками), вознакает обобщенная гипергеометрической функция ${}_3F_2$, а именно:

$${}_3F_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\frac{3}{2},\frac{3}{2}+z;1\right), \tag{1}$$

которая не определена в левой полуплоскости. В связи с этим целью настоящей работы является аналитическое продолжение функции (1) для отрицательных Rez.

Теоретическое рассмотрение. Исходное выражение, приводящее к (1), имеет вид:

$$F(z) = \int_0^1 (1-y^2)^z \frac{1}{y} \ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right) dy. \tag{2}$$

Действительно, разложив логарифм в ряд

$$\ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{2y^{2k+1}}{2k+1}$$

и просуммировав по k возникшие интегралы, получаем, что

$$\int_0^1 (1-y^2)^z \frac{1}{y} \ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right) dy = -\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(1+z\right)\,{}_3F_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\ \frac{3}{2},\frac{3}{2}+z;\ 1\right)}{\Gamma\left(z+\frac{3}{2}\right)}. \tag{2a}$$

Найдем выражение для $F(z)$ другим способом. Для этого подынтегральное выражение в (2) представим в виде

$$(1-y^2)^z \frac{1}{y} \ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right) = (1-y^2)^{z-1} \frac{1}{y} \ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right) - y(1-y^2)^{z-1} \ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right).$$

Очевидно, что интеграл от первого слагаемого есть $F(z-1)$, а интеграл от второго слагаемого, после вычисления по частям, окажется равным

$$\int_0^1 y(1-y^2)^{z-1}\ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right)dy = -\int_0^1 \frac{1}{z}(1-y^2)^{z-1}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2z}\frac{\Gamma(z)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)}.$$

Тогда для интеграла (2) возникает функциональное уравнение

$$F(z) = F(z-1) + \frac{\sqrt{\pi}}{2z}\frac{\Gamma(z)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)}. \tag{3}$$

Для того чтобы решить уравнение (3), сделаем замену $z = n$ и получим рекуррентное соотношение для последовательности $F(n)$:

$$F(n) = F(n-1) + \frac{\sqrt{\pi}}{2n}\frac{\Gamma(n)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)}. \tag{3a}$$

Решая это рекуррентное соотношение, находим:

$$F(n) = F(0) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{\pi}}{2k}\frac{\Gamma(k)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)}, \tag{4}$$

где

$$F(0) = -\frac{\pi^2}{4},$$

а сумма равна:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{\pi}}{2k}\frac{\Gamma(k)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1)\,{}_3F_2\left(1,1+n,1+n;\frac{3}{2}+n,2+n;1\right)}{2(1+n)\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)}. \tag{5}$$

В результате получаем выражение

$$F(n) = -\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1)\,{}_3F_2\left(1,1+n,\,1+n;\,\frac{3}{2}+n,\,2+n;\,1\right)}{2(1+n)\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)}, \tag{6}$$

из которого, переходя от n к переменной z, следует:

$$F(z) = -\sqrt{\pi}\Gamma(z+1)\,{}_3F_2\left(1,1+z,1+z;\frac{3}{2}+z,2+z;1\right)/2(1+z)\Gamma\left(\frac{3}{2}+z\right). \quad (6a)$$

Это выражение для $F(z)$, в отличее от (1), определено в левой полуплоскости. Связь междгипергеометрической функцией (1) и содержащейся в (6а), имеет вид:

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\frac{3}{2},\frac{3}{2}+z;1\right) = \frac{F\left(1,1+z,1+z;\frac{3}{2}+z,2+z;1\right)}{2(z+1)}. \quad (7)$$

При нахождении полюсов гипергеометрической функции, входящей в (6а), нужно воспользоваться явным представлением ${}_3F_2$ в виде бесконечного ряда:

$${}_3F_2\left(1,1+z,\ 1+z;\ \frac{3}{2}+z,2+z;\ 1\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}\frac{z+1}{n+z+1}\frac{\Gamma\left(z+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(n+z+\frac{3}{2}\right)}. \quad (8)$$

Если функция в левой части (7) определена лишь при $Rez > -1$, то функция (8) определена на всей комплексной плоскости за исключением z, в которых она имеет простые полюсы при целых отрицательных z и полуцелых отрицательных z.

Таким образом, получено новое представление для обобщенной гипергеометрической функции $\left({}_3F_2\,\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\frac{3}{2},\frac{3}{2}+z;1\right)$, которое позволяет сделать аналитическое продолжение этой функции в левую полуплоскость. Это выражение может быть использовано при вычислении интегралов по теореме Коши о вычетах, в частности, при нахождении точных аналитических выражений для вкладов в аномальный магнитный момент лептонов a_L от поляризации вакуума лептонными петлями.

УДК 539.12

РОЛЬ ПОЛЯРИЗАЦИИ ПУЧКОВ ДЛЯ ДЕТАЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ СВОЙСТВ ЧАСТИЦ И ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ НА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННЫХ КОЛЛАЙДЕРАХ

А. А. Бабич

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь

Рассмотрен потенциал экспериментов на линейных электрон-позитронных коллайдерах с поляризованными пучками для детального изучения свойств частиц и их взаимодействий в физике микромира. Показано, что поляризация электронных и позитронных пучков в сочетании с другими замечательными особенностями линейных электрон-позитронных коллайдеров (чистота экспериментов, возможность управления энергией столкновений) позволяет значительно повысить чувствительность экспериментов к эффектам динамики частиц. В частности, структура и особенности взаимодействий скалярных и псевдоскалярных частиц может быть обнаружена и исследована только в случае столкновений пучков с двойной поляризацией.