

расчета и компьютерного моделирования, различаются соответственно на 2,3 и 3,5 %, что свидетельствует об адекватности разработанной компьютерной модели.

#### Л и т е р а т у р а

1. Вершинский, С. В. Динамика вагонов / С. В. Вершинский, В. Н. Данилов, В. Д. Хусидов. – Москва : Транспорт, 1991. – 360 с.
2. Галай, Э. И. Тормозные системы железнодорожного транспорта. Расчет пневматических тормозов / Э. И. Галай, Е. Э. Галай, П. К. Рудов. – Гомель : БелГУТ, 2014. – 271 с.
3. Varazhun, I. Determination of Longitudinal Forces in the Cars Automatic Couplers at Train Electrodynamic Braking / I. Varazhun, A. Shimanovsky, A. Zavarotny // Procedia Engineering. – 2016. – Vol. 134. – P. 415–421.

УДК 621.313

### АНАЛИЗ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В РОТОРАХ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЕЙ, ИЗГОТОВЛЕННЫХ ИЗ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Д. В. Комнатный

*Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь*

*Рассмотрен расчет электромагнитных полей в электродвигателях, в конструкциях которых используются композитные материалы. Записаны уравнения Максвелла и материальные уравнения для квазистационарных полей в композитных материалах. Приведены уравнения Максвелла и граничные условия для поля в двухслойной сфере металл–композит. Описан способ получения расчетных соотношений для составляющих электромагнитного поля.*

**Ключевые слова:** электрические двигатели, композитные материалы, уравнения Максвелла, материальные уравнения, граничные условия, двухслойная сфера металл–композит, ротор.

### METHODS OF ELECTROMAGNETIC FIELD ANALYSIS IN ELECTRIC MOTOR ROTORS, MANUFACTURED FROM COMPOSITE MATERIALS

D. V. Komnatny

*Sukhoi State Technical University of Gomel, the Republic of Belarus*

*The electromagnetic fields calculation in electric motors, in which design composite materials are used, is discussed. Maxwell's equations, constructive relations for quasi-stationary electromagnetic fields in composite materials are recorded. The Maxwell's equations and boundary conditions for the field in two-layer metal-composite sphere are adduced. The method of calculation relations for electromagnetic field components obtaining is described.*

**Keywords:** electric motors, composite materials, Maxwell's equations, constructive relations, boundary conditions, two-layer metal-composite sphere, rotor.

В настоящее время широкое распространение получили индивидуальные средства электротранспорта: скутеры, катера, самокаты, дроны, автомобили. Для облегчения этих машин применяются электродвигатели с конструктивными элементами, изготовленными из композитных материалов. Такие материалы являются новыми для электромашиностроения, поэтому актуальной задачей является анализ электро-

магнитных полей в конструкциях таких двигателей с учетом того, что электрические свойства композитов значительно сложнее, чем проводников и диэлектриков.

Для решения этой задачи принято, что электромагнитное поле в электродвигателях является квазистационарным, иными словами пренебрегается токами смещения. Тогда уравнения Максвелла с учетом пренебрежимо малой проводимости композита имеют вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $H$  – напряженность магнитного поля, А/м;  $E$  – напряженность электрического поля, В/м;  $\mu$  – магнитная проницаемость среды.

Материальные уравнения композита имеют вид:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 k \vec{E}(t - t_1) + \xi \vec{H}(t - t_3), \\ \vec{B} &= \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi \vec{H}(t - t_2) + \zeta \vec{E}(t - t_4), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $D$  – индукция электрического поля, Кл/м<sup>2</sup>;  $B$  – индукция магнитного поля, Т;  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная, Ф/м;  $k$ ,  $\xi$ ,  $\chi$ ,  $\zeta$  – постоянные, описывающие композитный материал;  $\mu_0$  – магнитная постоянная Гн/м;  $t$  – время, с;  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$ ,  $t_4$  – характерные времена, описывающие свойства композита, с.

Тогда после подстановки (2) в (1) и перехода к комплексному представлению получаются уравнения для электромагнитного поля в композите:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= j\omega \mu_k \vec{H}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\mu_k = \mu_0 + \chi e^{j\omega t_2}$ ;  $\omega$  – круговая частота, рад/с.

Уравнения Максвелла (3) для электромагнитного квазистационарного поля в композитном материале дают возможность выполнить анализ поля в деталях конструкции двигателя средствами, разработанными к настоящему времени.

В качестве примера рассматривается анализ квазистационарного электромагнитного поля в двухслойной сфере, внешний слой которой металл, а внутренний – композитный материал. Такую конструкцию имеют роторы недавно разработанных двигателей фирмы Buddha Motors. Сфера находится во внешнем вращающемся магнитном поле, которое описывается выражением

$$\vec{B} = \frac{3}{2} B_m \vec{e}_x - j \frac{3}{2} B_m \vec{e}_y, \quad (4)$$

где  $B_m$  – амплитуда индукции магнитного поля, Тл;  $e_x$ ,  $e_y$  – орты декартовой системы координат с центром в центре сферы.

Электромагнитное поле в сфере является суперпозицией полей, созданных составляющими вращающегося магнитного поля. Для определения этих полей необхо-

димо записать уравнения Максвелла для трех областей: воздух вблизи ротора, металлический слой, композитная сфера.

Для воздуха уравнения Максвелла имеют вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -js\omega\mu_{a0}\vec{H}, \end{aligned} \quad (5)$$

– для металла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -js\omega\mu_{a1}\vec{H}, \end{aligned} \quad (6)$$

– для композита:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -js\omega\mu_{a2}\vec{H}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\mu_{a0}$  – магнитная проницаемость воздуха, Гн/м,  $\mu_{a1}$  – магнитная проницаемость металла, Гн/м;  $\mu_{a2} = \mu_k$  – магнитная проницаемость композита, Гн/м.

В уравнениях (5)–(7) учтено наличие скольжения  $s$ , по причине которого частота поля ротора отличается от частоты вращающегося магнитного поля.

На границах раздела воздух–металл и металл–композит задаются классические граничные условия

$$\begin{aligned} B_{n,i+1} &= B_{n,i} \text{ или } \mu_{i+1}\mu_0 H_{n,i+1} = \mu_i\mu_0 H_{n,i}, \\ H_{\tau,i+1} &= H_{\tau,i}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $n, \tau$  – единичные векторы нормали и касательной.

Для сферы  $H_n = H_r$ ,  $H_\tau = H_\theta$ , где  $H_r, H_\theta$  – составляющие вектора напряженности магнитного поля в сферической системе координат.

Из уравнений (5)–(7) могут быть получены известные уравнения Гельмгольца для напряженности электрического поля в сферической системе координат:

– для воздуха

$$\nabla_\varphi^2 E_\varphi - \frac{E_\varphi}{r^2 \sin^2 \varphi} = 0; \quad (9)$$

– для металла

$$\nabla_\varphi^2 E_\varphi - \frac{E_\varphi}{r^2 \sin^2 \varphi} = \alpha^2 E_\varphi, \text{ где } \alpha = \sqrt{js\omega\mu_{a1}\gamma}; \quad (10)$$

– для композита

$$\nabla_{\varphi}^2 E_{\varphi} - \frac{E_{\varphi}}{r^2 \sin^2 \varphi} = 0, \quad (11)$$

где  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  – сферические координаты;  $E_{\varphi}$  – составляющая напряженности электрического поля в сферической системе координат;  $\gamma$  – удельная проводимость металла, См/м.

В литературных источниках показано, что решение уравнения (9) с учетом ограниченности на бесконечности имеет вид:

$$E_{\varphi} = C_{20} r^{-2} \sin \theta. \quad (12)$$

Решение уравнения (10) с учетом ограниченности в сферическом слое имеет вид:

$$E_{\varphi} = \left[ C_{11} \frac{1}{x} \left( \frac{\sin x}{x} - \cos x \right) + C_{21} \frac{1}{x} \left( \frac{\cos x}{x} + \sin x \right) \right] \sin \theta, \quad (13)$$

где

$$x = -jr \sqrt{j\omega s \mu_{a2}}.$$

Решение уравнения (11) с учетом ограниченности в начале координат имеет вид:

$$E_{\varphi} = C_{12} r \sin \theta. \quad (14)$$

Чтобы найти константы интегрирования  $C_{20}$ ,  $C_{11}$ ,  $C_{21}$ ,  $C_{12}$  в (12)–(14) следует удовлетворить граничным условиям (8). Для этого из уравнений (6)–(8), представленных в сферической системе координат, по соотношениям (12)–(14) находятся выражения для составляющих магнитного поля и подставляются в граничные условия (8). Получается система линейных алгебраических уравнений для постоянных интегрирования, в которую входит составляющая вращающегося магнитного поля.

Таким образом, показано, что анализ квазистационарного электромагнитного поля в композитном материале незначительно отличается от расчета такого же поля в диэлектрике. Отличие состоит, главным образом, в задании параметров композитного материала. Решение уравнений Максвелла сходно с уже полученными решениями в прикладной электродинамике.

Следовательно, анализ электромагнитного поля в электрических двигателях с элементами конструкций из композитных материалов может быть осуществлен на основе уже имеющихся наработок и хорошо апробированными методами. Это открывает широкие возможности для создания современных средств индивидуального транспорта с высокими техническими, экономическими и экологическими характеристиками.