

УДК 621-192

DOI 10.62595/1819-5245-2025-1-15-23

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТОСПОСОБНОСТИ РОБОТОТЕХНИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА ПО КРИТЕРИЮ ТОЧНОСТИ

**М. И. МИХАЙЛОВ**

Учреждение образования «Гомельский государственный  
технический университет имени П. О. Сухого»,  
Республика Беларусь

*Разработана математическая модель работоспособности робототехнического комплекса по критерию геометрической точности. Определены статистические параметры точности установки детали мобильным роботом в патрон станка. Разработан критерий обеспечения достаточного условия работоспособности робототехнического комплекса.*

**Ключевые слова:** мобильный робот, робототехнический комплекс, геометрическая точность, математическое моделирование.

**Для цитирования.** Михайлов, М. И. Моделирование работоспособности робототехнического комплекса по критерию точности / М. И. Михайлов // Вестник Гомельского государственного технического университета имени П. О. Сухого. – 2025. – № 1 (100). – С. 15–23. – DOI 10.62595/1819-5245-2025-1-15-23

## MODELING THE PERFORMANCE OF A ROBOTIC COMPLEX BASED ON THE ACCURACY CRITERION

**M. I. MIKHAILOV**

*Sukhoi State Technical University of Gomel,  
the Republic of Belarus*

*A mathematical model of a robotic complex performance based on the criterion of geometric accuracy has been developed. Statistical parameters of the accuracy of installing a part by a mobile robot in a machine chuck have been determined. A criterion for ensuring a sufficient condition for the performance of a robotic complex has been developed.*

**Keywords:** mobile robot, robotic complex, geometric accuracy, mathematical modeling.

**For citation.** Mikhailov M. I. Modeling the performance of a robotic complex based on the accuracy criterion *Vestnik Gomel'skogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta imeni P. O. Sukhogo*, 2025, no. 1 (100), pp. 15–23 (in Russian). DOI 10.62595/1819-5245-2025-1-15-23

### Введение

Эффективным средством комплексной автоматизации производственных процессов в промышленности являются робототехнические комплексы (РТК) [1–3]. Чаще всего такие системы формируются на основе стационарных или квазистационарных роботов. Как известно, манипуляционные системы структурно представляют собой разомкнутые кинематические цепи [4–11]. Как правило, звенья моделируются абсолютно твердыми телами [12–14].

Уравнения кинематики описывают движения характерных точек манипуляционных систем относительно выбранных систем координат, при этом не рассматриваются усилия, вызывающие эти движения [7–11].

Однако мало уделялось внимания формированию и обеспечению работоспособности РТК на основе мобильных роботов.

Цель работы – разработка математической модели работоспособности РТК на основе мобильного робота по критерию точности.

### Методика моделирования

На рис. 1 показана планировка роботизированного технического комплекса. Он содержит станки 1, 2, 4, мобильный промышленный робот 5, накопитель заготовок 3.

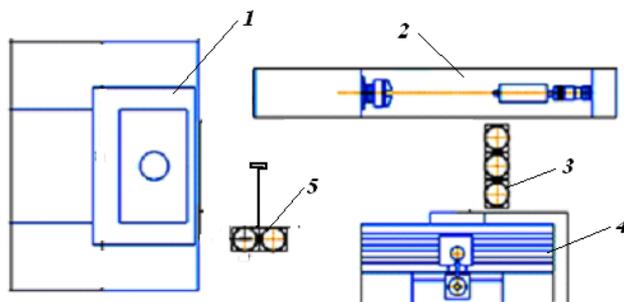
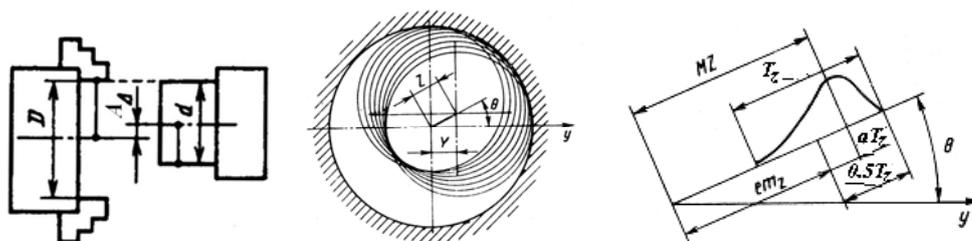
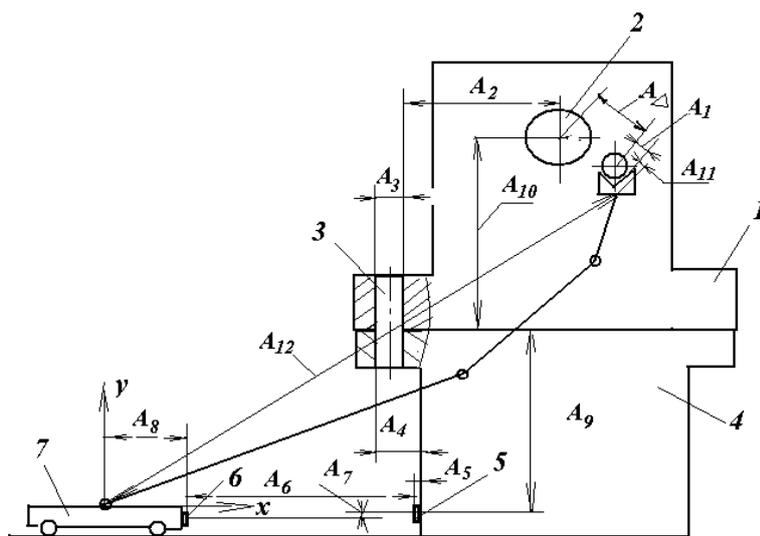


Рис. 1. Планировка РТК

Рассмотрим размерные связи, возникающие при автоматической установке заготовки короткого вала в самоцентрирующий патрон токарного станка (рис. 2).



а)



б)

Рис. 2. Расчетная схема размерных связей при автоматической загрузке станка мобильным роботом:

1 – коробка скоростей; 2 – шпиндель; 3 – фиксирующий элемент коробки скоростей; 4 – станина; 5 – контрольная метка; 6 – датчик внешней связи робота; 7 – мобильный робот

Установку заготовки в патрон и сьем детали осуществляет робот 7 (рис. 2, а). Робот вносит заготовку в рабочую зону станка так, чтобы ось заготовки совпадала с осью раскрытых кулачков патрона, и затем задвигает заготовку в патрон, после чего подается команда на зажим кулачков патрона. Анализ работоспособности РТК по критерию геометрической точности выполнялся поэтапно.

На первом этапе определялось выполнение необходимого условия работоспособности РТК. Для этого разрабатывалась размерная цепь конечных звеньев РТК (рис. 2, а). На рис. 2, а видно, что вход заготовки в раскрытые кулачки патрона возможен, если отклонение от соосности позиционируемой заготовки относительно оси кулачков патрона  $A_{\Delta}$  не превышает требуемого значения.

Для упрощения выражений принималось, что смещение  $A_{\Delta} = Z$ , тогда совпадающее с направлением исходного размера звено (осью  $O_y$ )  $Y = Z \cos \theta$ . Принималось, что угол  $\theta$  распределен равномерно в пределах от 0 до  $2\pi$ . Для этих условий  $M(\cos \theta) = 0$  и  $D(\cos \theta) = 0,5$ , тогда математическое ожидание и дисперсия величины  $Y$ :  $M_Y = 0$ ;  $D_Y = 0,5(D_z + M_z^2)$ .

С учетом параметров распределения математическое ожидание и дисперсия отклонения  $A_{\Delta}$  от соосности будет иметь вид:

$$M_z = em_z + \alpha_z T_z \left( \frac{em_z}{T_z} + \alpha_z \right); \quad (1)$$

$$D_z = \frac{1}{36} K_z^2 T_z^2, \quad (2)$$

где  $em_z$ ,  $\alpha_z$ ,  $K_z$  – соответственно среднее значение и коэффициенты асимметрии и относительного рассеивания функции распределения отклонения от соосности заготовки и патрона.

Тогда

$$D_Y = 0,5 \left( \frac{1}{36} K_z^2 T_z^2 + T_z^2 \left( \frac{em_z}{T_z} + \alpha_z \right)^2 \right). \quad (3)$$

Полагая, что

$$D_Y = \frac{1}{36} K_y^2 T_y^2, \quad (4)$$

получим:

$$K_y^2 T_y^2 = 0,5 \left[ K_z^2 + 36 \left( \frac{em_z}{T_z} + \alpha_z \right)^2 \right] T_z^2. \quad (5)$$

Введя коэффициент приведения  $\xi_z$ , окончательно получим:

$$M_{\Sigma z} = 0; \quad K_{\Sigma z}^2 T_{\Sigma z}^2 = \sum_z \xi_z^2 K_{xz}^2 T_z^2, \quad (6)$$

где  $K_{xz}$  – приведенный коэффициент относительного рассеивания,

$$K_{xz}^2 = 0,5 \left[ K_z^2 + 36 \left( \frac{em_z}{T_z} + \alpha_z \right)^2 \right]. \quad (7)$$

Значения  $em_z$  и  $T_z$  вычисляются по формулам (рис. 2, а):

$$em_z = \frac{1}{2}((D-d) + (em_D - em_d) + (\alpha_D T_D + \alpha_d T_d)) - \alpha_z T_z; \quad (8)$$

$$T_z = \frac{1}{2K_z} \sqrt{K_D^2 T_D^2 + K_d^2 T_d^2}. \quad (9)$$

Рассмотрим условие, при котором заготовка может занимать любое относительное положение.

Допустим, заготовка и патрон занимают относительное положение в поле зазора на линии, совпадающей с направлением исходного размера или расположенной по отношению к нему под некоторым постоянным углом.

Пусть имеем функцию  $\varphi_1(z)$  плотности вероятности радиального зазора и функцию  $\varphi_2(y)$  плотности вероятности положения заготовки в патроне по оси  $y$  (рис. 3). Требуется определить функции  $\varphi_3(x)$  и  $\varphi_4(x)$  плотности условных вероятностей положения заготовки в патроне по оси  $x = y$ . Для схемы на рис. 3, а

$$\varphi_3(x) = \varphi_2(y) \text{ при } x = \overline{0, a} \text{ и } \varphi_4(x) = \varphi_2(y) \int_a^b \varphi_1(z) dz \text{ при } x = \overline{a, b}.$$

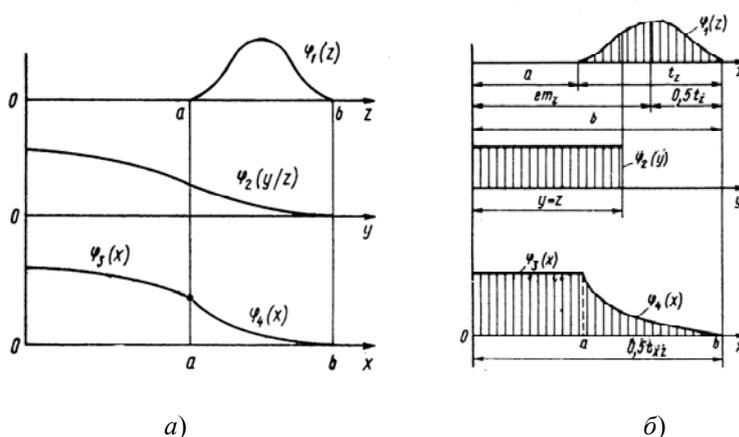


Рис. 3. Схемы к расчету установки заготовки с различными законами распределения соосности и положения вала:  
а – функции распределения; б – схемы компоновки законов распределения

В практике машиностроения наиболее часто встречаются законы распределения случайных величин – равновероятный и Гаусса.

Пусть функция

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(z - M_z)^2}{2\sigma_z^2}\right], \quad (10)$$

а функция  $\varphi_2(y) = 1/b$  – равновероятная (рис. 3, б). Тогда  $\varphi_3(x) = \varphi_2(y) = 1/b$ ;

$$\varphi_4(x) = \frac{1}{b\sigma_z \sqrt{2\pi}} \int_{x=a}^b \exp\left[-\frac{(z - M_z)^2}{2\sigma_z^2}\right] dz. \quad (11)$$

При симметричном смещении заготовки в обе стороны  $M_x = 0$ , и дисперсия величины  $x$ :

$$D_x = 2 \int_0^a x^2 \varphi_3(x) dx + 2 \int_a^b x^2 \varphi_4(x) dx. \quad (12)$$

Приведенный коэффициент относительного рассеивания

$$K_{xz} = 3 \sqrt{D_x} \frac{1}{b}. \quad (13)$$

По результатам вычислений на ЭВМ для приведенных сочетаний функций построен график (рис. 4, а) для определения коэффициента  $K_{xz}$ .

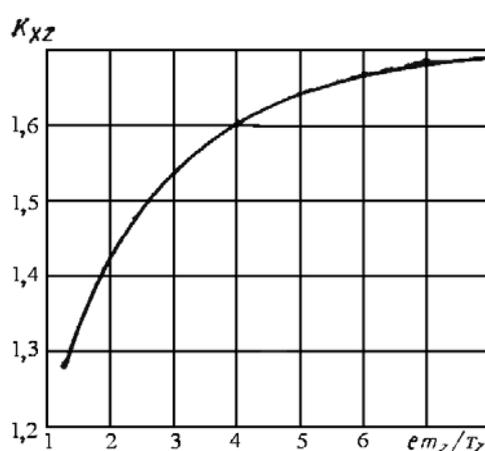


Рис. 4. Графическая зависимость  $K_{xz} = f(em_z/T_z)$

Если анализ размеров производится в направлении под углом  $\theta$  к направлению исходного размера, то коэффициент приведения  $\xi_z$  умножают на  $\cos \theta$ .

Обеспечение требуемого значения  $A_\Delta$  является необходимым условием возможности автоматической установки заготовки в патрон. Допустимое значение  $A_\Delta$  рассчитывается исходя из размеров  $D$  и  $d$  по формулам (8) и (9). Из этих формул следует предельно допустимое отклонение  $A_{\Delta \max}$  от соосности, которое позволяет роботу ввести заготовку в раскрытый патрон. Поскольку для большинства патронов с механическим приводом диапазон раскрытия кулачков может быть достаточно большим, то, как правило, не возникает трудности в обеспечении раскрытия кулачков по диаметру больше диаметра заготовки, тогда предельно допустимое отклонение от соосности будет равно  $A_{\Delta \max}$ . Значение исходного звена при желании обеспечить соосность в этом случае можно записать в виде  $A_\Delta = 0 \pm 1/2T_{A\Delta}$  мм. Это означает, что желательно, чтобы  $A_\Delta = 0$ , но допустимое отклонение  $\pm 1/2T_{A\Delta}$  мм.

Рассчитанное значение  $A_\Delta$  позволяет лишь обеспечить ввод заготовки внутрь кулачков и является необходимым, но недостаточным условием.

Кулачки, сдвигающиеся к оси патрона, при наличии отклонения от соосности будут стремиться переместить заготовку в новое положение. Заготовка же пока еще закреплена в схвате робота. Следовательно, возникнут силы, при передаче заготовки от робота в патрон. Сила может быть определена по формуле

$$M_p = M_j M_{A_\Delta}, \quad (14)$$

где  $M_p$ ,  $M_j$ ,  $M_{A_\Delta}$  – соответственно математические ожидания функций усилия зажима, жесткости системы «робот – заготовка – патрон» и отклонения от соосности.

Например, при жесткости  $M_j = 500$  Н/мм в случае отклонения от соосности  $M_{A_\Delta} = M_{A_{\Delta\max}} = 10$  мм, сила, действующая в момент закрепления заготовки в патроне, составляет  $M_p = 5000$  Н. Полученная сила приведет к отказу РТК. Поэтому необходимо ограничить силу  $M_p$  до значения, соответствующего технической характеристике РТК. Допустим, что в конкретном примере для установки валика необходимо, чтобы  $[M_p] \leq 100$  Н, тогда допустимое отклонение от соосности

$$[M_{A_{\Delta\max}}] = [M_p] / M_j = 100 / 500 = 0,2 \text{ мм}. \quad (15)$$

Таким образом,

$$[M_{A_{\Delta\max}}] \ll M_{A_{\Delta\max}}.$$

На втором этапе необходимо произвести оценку требуемой точности всех элементов РТК. Для этого разрабатывается размерная цепь, пример которой представлен на рис. 2, б. Анализ размерной цепи выполнялся табличным методом (см. таблицу).

#### Составляющие размерной цепи

Номер размерной цепи	Описание размера цепи
$A_1$	Расстояние между осью заготовки и точкой контакта заготовки со схватом
$A_2$	Расстояние между осью патрона и точкой контакта коробки скоростей с фиксирующим элементом
$A_3$	Расстояние между точками контакта фиксирующего элемента с коробкой скоростей и станиной
$A_4$	Расстояние между точками контакта станины с фиксирующим элементом и контрольной меткой
$A_5$	Расстояние между точкой контакта контрольной метки со станиной и ее рабочей поверхностью
$A_6$	Расстояние между точками рабочей поверхности контрольной метки и датчиком внешней связи робота
$A_7$	Расстояние между осями контрольной метки и датчиком внешней связи робота
$A_8$	Расстояние между датчиком внешней связи робота и началом системы координат манипулятора робота
$A_9$	Расстояние между точкой контакта коробки скоростей со станиной и осью контрольной метки
$A_{10}$	Расстояние между точкой контакта коробки скоростей со станиной и осью патрона
$A_{11}$	Расстояние между точками контакта схвата с заготовкой и рукой робота
$A_{12}$	Расстояние между точками контакта руки робота с заготовкой и началом системы координат робота

Размерная связь может быть отображена математически тремя уравнениями: уравнением размерной цепи в номиналах; уравнением допусков этих размеров, которое соответствует методу достижения точности; уравнением средних отклонений размеров.

В результате расчета размерной цепи необходимо определить допуски составляющих звеньев. Используя метод максимума-минимума, получим требуемый квалитет, по которому определяются допуски каждой составляющей размерной цепи:

$$a = \frac{T_{A_{\Delta}}}{\sum_{j=1}^n \sqrt[3]{(A_j + 0,001A_j)^2}}; \quad (16)$$

$$A_{cp} = \sum_{j=1}^n A_j / n, \quad (17)$$

где  $a$  – количество единиц допуска размеров.

При наладке РТК (рис. 2) размер  $A_{12}$  в процессе программирования робота подбирают так, чтобы  $A_{\Delta}$  было в пределах допустимых значений, т. е. точность наладки обеспечивают методом регулирования. Однако при автоматической загрузке-выгрузке деталей необходимо применение метода полной взаимозаменяемости.

В процессе работы РТК действительное значение размера  $A_{\Delta}$  будет меняться в основном вследствие погрешностей позиционирования робота, тепловых деформаций, погрешностей установки заготовки в захвате. Так, погрешность позиционирования манипулятора загрузочных роботов может составлять  $\geq 0,5$  мм и больше; шпиндель токарного станка, например, 16K20PФ3 при нагреве передней бабки на 20 °С при работе РТК смещается в вертикальной плоскости на 0,04 мм, а в горизонтальной – на 0,02 мм.

Для автоматической работы РТК необходимо обеспечить, чтобы каждую заготовку робот устанавливал в патрон станка без поднастройки и регулировки, поэтому соосность  $A_{\Delta}$  нужно обеспечивать по методу полной взаимозаменяемости.

Возможно несколько путей решения поставленной задачи. Во-первых, можно уменьшить допуски размеров составляющих звеньев. Для этого, например, применяют более точный схват с меньшей погрешностью центрирования [14]; используют предварительно обработанные заготовки для уменьшения погрешности установки; ограничивают диапазон рабочих температур при эксплуатации РТК, а также робот следует жестко позиционировать непосредственно на станине станка.

Как показывает опыт, наиболее сложно обеспечить точность звена  $T_{A7}$ , так как это связано с качеством напольного покрытия, жесткостью колес и подвески робота. Кроме этого настроенный размер  $A_7$  нарушается при динамической работе манипулятора, поэтому необходима жесткая фиксация базы робота с оборудованием. Для этого следует использовать конические фиксирующие механизмы.

Во-вторых, можно расширить допуск замыкающего звена  $T_{\Delta}$ . В соответствии с уравнением (15), из которого было получено значение допуска, следует, что расширение допуска при одной и той же допустимой силе может быть обеспечено снижением жесткости закрепления заготовки в схвате робота. Этот путь наиболее удобен и поэтому схваты роботов делают подпружиненными. Однако это приводит

к увеличению погрешности позиционирования заготовки в схвате, выбрав наиболее дешевый робот с точностью позиционирования  $\pm 1$  мм, можно определить ожидаемое поле рассеяния  $\omega_{\Delta}$  размера  $A_{\Delta}$  по формуле  $\omega_{\delta} = \sqrt{\omega_j}$ , где  $\omega_j$  – поля рассеяния составляющих звеньев, пусть  $\omega_{\Delta} = 2,4$  мм. Следовательно, в схвате требуется обеспечить максимальное смещение заготовки  $A'_{\Delta \max} = \pm 1,2$  мм. Для этого жесткость крепления должна быть не больше:

$$M_{j \max} = M_p / M_{A_{\Delta \max}} \text{ Н/мм.}$$

По рассчитанной жесткости разрабатывается конструкция пружинного подвеса схвата робота.

В этом случае необходимо использовать робот с автоматической поисковой системой управления. При этом могут изменяться структура и параметры размерной связи, метод достижения точности замыкающего звена: вместо полной взаимозаменяемости будет использоваться автоматическое регулирование размера. Компенсатором в размерной цепи может быть размер позиционирования схвата робота, который управляется от УЧПУ. Робот необходимо оснастить техническим зрением и техническим интеллектом с использованием ЭВМ для анализа полученного изображения и управления положением схвата с деталью, т. е. нужна система адаптивного управления роботом.

### Заключение

Полученные математические зависимости позволяют оптимизировать РТК по критерию точности при его проектировании.

### Литература

1. Асфаль, Р. Роботы и автоматизация производства / Р. Асфаль ; пер. с англ. М. Ю. Евстигнеева. – М. : Машиностроение, 1989. – 446 с.
2. Афонин, В. Л. Интеллектуальные робототехнические системы : курс лекций / В. Л. Афонин, В. А. Макушкин. – М. : Интернет-Ун-т Информ. Технологий, 2009. – 222 с.
3. Козырев, Ю. Г. Применение промышленных роботов : учеб. пособие / Ю. Г. Козырев. – М. : КНОРУС, 2021. – 488 с.
4. Козырев, Ю. Г. Промышленные роботы: основные типы и технические характеристики : учеб. пособие / Ю. Г. Козырев. – М. : КНОРУС, 2021. – 560 с.
5. Артоболевский, И. И. Теория механизмов и машин / И. И. Артоболевский. – М. : Наука, 1975. – 640 с.
6. Корендясев, А. И. Определение числа степеней свободы исполнительного органа промышленного робота / А. И. Корендясев, Б. Л. Саламандра, Л. И. Тывес // Машиноведение. – 1984. – № 6. – С. 44–53.
7. Воробьев, Е. И. Анализ кинематики пространственных исполнительных механизмов манипуляторов методом матриц / Е. И. Воробьев // Механика машин. – 1970. – Вып. 53. – С. 8–16.
8. Механика миниатюрных роботов / В. Г. Градецкий, М. М. Князьков, Л. Ф. Фомин, В. Г. Чашухин. – М. : Наука, 2010. – 265 с.
9. Овакимов, А. Г. Кинематическое исследование пространственной цепи управляющего механизма манипулятора / А. Г. Овакимов // Известия вузов. Машиностроение. – 1971. – № 4. – С. 58–62.

10. Воробьев, Е. И. Механика промышленных роботов : в 3 кн. Кн. 1. Кинематика и динамика : учеб. пособие для вузов / Е. И. Воробьев, О. Д. Егоров, С. А. Попов. – М. : Высш. шк., 1988. – 304 с.
11. Булгаков, А. Г. Промышленные роботы. Кинематика, динамика, контроль и управление / А. Г. Булгаков, В. А. Воробьев. – М. : СОЛОН-ПРЕСС, 2012. – 485 с.
12. Воробьев, Е. И. Синтез механизмов по заданному движению твердого тела в пространстве / Е. И. Воробьев // Механика машин. – 1978. – Вып. 52. – С. 25–33.
13. Медведев, В. П. Синтез оптимального управления приводами манипулятора / В. П. Медведев // Современные технологии в задачах управления, автоматизации и обработки информации : тр. 12 междунар. науч.-техн. семинара. – М. : Изд-во МЭП, 2003. – С. 133.
14. Козырев, Ю. Г. Захватные устройства и инструменты промышленных роботов / Ю. Г. Козырев. – М. : КНОРУС, 2013. – 318 с.

### References

1. Asfal' R. *Robots and manufacturing automation*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1989. 446 p. (in Russian).
2. Afonin V. L. *Intelligent Robotic Systems*. Moscow, Internet-universitet informatsionnykh tekhnologii Publ., 2009. 222 p. (in Russian).
3. Kozyrev Yu. G. *Application of industrial robots*. Moscow, KNORUS Publ., 2021. 488 p. (in Russian).
4. Kozyrev Yu. G. *Industrial robots: main types and technical characteristics*. Moscow, KNORUS Publ., 2021. 560 p. (in Russian).
5. Artobolevskij I. I. *Mechanism and machine theory*. Moscow, Nauka Publ., 1975. 640 p. (in Russian).
6. Korendyasev A. I., Salamandra B. L., Tyves L. I. Determination of the number of degrees of freedom of the actuator of an industrial robot. *Mashinovedenie*, 1984, no. 6, pp. 44–53 (in Russian).
7. Vorob'ev E. I. Analysis of kinematics of spatial actuators of manipulators by matrix method. *Mekhanika mashin*, 1970, iss. 53, pp. 8–16 (in Russian).
8. Gradeckij V. G., Knyaz'kov M. M., Fomin L. F., Chashchukhin V. G. *Miniature robot mechanics*. Moscow, Nauka Publ., 2010. 265 p. (in Russian).
9. Ovakimov A. G. Kinematic study of the spatial chain of the manipulator control mechanism. *Izvestiya vuzov. Mashinostroenie*, 1971, no. 4, pp. 58–62 (in Russian).
10. Vorob'ev E. I., Egorov O. D., Popov S. A. *Industrial robot mechanics*. Book 1. Kinematika i dinamika. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1988. 304 p. (in Russian).
11. Bulgakov A. G. *Industrial robots. Kinematics, dynamics, monitoring and control*. Moscow, SOLON-PRESS Publ., 2012. 485 p. (in Russian).
12. Vorob'ev E. I. Synthesis of mechanisms by a given motion of a solid in space. *Mekhanika mashin*, 1978, iss. 52, pp. 25–33 (in Russian).
13. Medvedev V. P. Synthesis of optimal control of manipulator drives. *Sovremennye tekhnologii v zadachakh upravleniya, avtomatiki i obrabotki informatsii: tr. 12 mezhdunar. nauch.-tekhn. seminara* [Modern technologies in control and automation tasks and information processing: tr. 12 international. scientific-technical workshop]. Moscow, Izdatel'skii dom MEI Publ., 2003, 133 p. (in Russian).
14. Kozyrev Yu. G. *Zahvatnye ustrojstva i instrumenty promyshlennykh robotov*. Moscow, KNORUS, 2013. 318 p. (in Russian).