

УДК 517.9

DOI 10.62595/1819-5245-2025-1-5-14

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В НЕЛОКАЛЬНОЙ СРЕДЕ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ ЭНЕРГИИ

О. Н. ШАБЛОВСКИЙ

*Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого»,
Республика Беларусь*

Рассмотрена динамика волн в системе «среда – источник энергии». Объемный источник энергии есть нелинейная функция температуры. Примером неклассического материала служит среда, обладающая слабой пространственной нелокальностью. Математическая модель таких процессов – волновое уравнение, содержащее дополнительный член с производной 4-го порядка по пространственной координате. Обсуждены два вида нелинейных источников: тригонометрическая нелинейность («двойной синус-Гордон», «синус-Гордон»); полиномиальная (5-й степени) нелинейность. Построены точные аналитические решения, представляющие собой волну переброса (кинк) и уединенную волну (впадину либо возвышение). Отличительная черта построенной волны переброса: аргументом арктангенса служит дробно-рациональная функция экспоненты волновой координаты. Уединенная волна есть дробно-рациональная функция волновой координаты. Определены закономерности влияния параметра нелокальности среды на дозвуковую и сверхзвуковую скорость движения волны. Изучена корреляция «аналитическая структура функции источника – профиль волны». Дана подробная иллюстрация дозвукового и сверхзвукового режимов движения волн в зависимости от немонотонных и знакопеременных свойств функции источника.

Ключевые слова: нелокальность, волна переброса, дозвуковая и сверхзвуковая волна, тригонометрическая и полиномиальная нелинейность источника.

Для цитирования. Шабловский, О. Н. Распространение волн в нелокальной среде с нелинейными источниками энергии / О. Н. Шабловский // Вестник Гомельского государственного технического университета имени П. О. Сухого. – 2025. – № 1 (100). – С. 5–14. – DOI 10.62595/1819-5245-2025-1-5-14

WAVE PROPAGATION IN A NON-LOCAL MEDIUM WITH NON-LINEAR ENERGY SOURCES

O. N. SHABLOVSKY

*Sukhoi State Technical University of Gomel,
the Republic of Belarus*

The dynamics of waves in the “medium – energy source” system are considered. The volumetric energy source is a nonlinear function of temperature. An example of a nonclassical material is a medium with weak spatial nonlocality. The mathematical model of such processes is a wave equation containing an additional term with a fourth-order spatial derivative. Two types of nonlinear sources are discussed: trigonometric nonlinearity (“double sine-Gordon”, “sine-Gordon”) and polynomial (fifth-degree) nonlinearity. Exact analytical solutions are constructed, representing a kink (wave overturn) and a solitary wave (either a trough or an elevation). A distinctive feature of the constructed kink wave is that the argument of the arctangent is a fractional-rational function of the exponential wave coordinate. The solitary wave is a fractional-rational function of the wave coordinate. The regularities of the influence of the medium's nonlocality parameter on the subsonic and supersonic wave propagation speeds are determined. The correlation between the “analytical structure of the source function – wave profile” is studied. A detailed illustration of subsonic and supersonic wave propagation regimes is provided, depending on the non-monotonic and sign-changing properties of the source function.

Keywords: nonlocality, kink wave, subsonic and supersonic waves, trigonometric and polynomial source nonlinearity.

For citation. Shablovsky O. N. Wave propagation in a non-local medium with non-linear energy sources. *Vestnik Gomel'skogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta imeni P. O. Sukhogo*, 2025, no. 1 (100), pp. 5–14 (in Russian). DOI 10.62595/1819-5245-2025-1-5-14

Введение

Важной задачей современного материаловедения является экспериментальный и теоретический анализ воздействия нелинейных по температуре объемных источников энергии на материалы с неклассическими свойствами [1, 2]. В рамках этой проблемы заслуживают внимание среды, обладающие пространственно-нелокальными тепловыми, диффузионными, гидродинамическими и так далее свойствами [3]. Подробное теоретическое изучение динамики нелинейных волн, которые генерирует объемный источник энергии, дает возможность указать наиболее эффективные в прикладном отношении режимы воздействия на материал [4–8]. Отметим также публикации [9–12], содержащие новые математические результаты исследования нелинейных гиперболических уравнений.

В данной статье рассматриваются волны переброса и уединенные волны в системе «нелокальная среда – нелинейный источник». Цель работы – построить новые аналитические структуры, характерные для бегущих волн и проанализировать их поведение в условиях дозвукового и сверхзвукового режимов движения.

Преобразование волнового уравнения

Волновое уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} - w^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} - \varepsilon \chi_1^2 \frac{\partial^4 \tau}{\partial x^4} = k_v(\tau),$$

где τ – функция, характеризующая некоторое физическое свойство среды; x – декартова координата; t – время; w – скорость распространения малых возмущений; $k_v(\tau)$ – функция источника; $\varepsilon \chi_1^2$ – параметр слабой пространственной нелокальности (см. [13] и указанную там библиографию). Для размерных и безразмерных уравнений применяем одинаковую форму записи, выполняя с помощью масштабов τ_b , t_b следующий переход:

$$\begin{aligned} (\tau / \tau_b) &\rightarrow \tau, \quad [x / (w t_b)] \rightarrow x', \quad (t / t_b) \rightarrow t, \\ [(k_v t_b^2) / \tau_b] &\rightarrow k_v, \quad [\varepsilon \chi_1^2 / (w^4 t_b^2)] \rightarrow \varepsilon \chi^2. \end{aligned}$$

В результате имеем нелокальное волновое уравнение четвертого порядка по пространственной координате:

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial (x')^2} - \varepsilon \chi^2 \frac{\partial^4 \tau}{\partial (x')^4} = k_v(\tau). \quad (1)$$

При $\varepsilon = 0$ уравнение (1) – это классическое уравнение Клейна–Гордона с нелинейным источником. После преобразования независимых переменных $(x', t) \rightarrow (\tau, t)$ уравнение (1) можно записать в виде системы [14]:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial \tau} - u \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} \right) = k_v; \quad (2)$$

$$\theta = \tau + \varepsilon \chi^2 u \frac{\partial u}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial \tau} = u \frac{\partial v}{\partial \tau}. \quad (3)$$

Здесь $u = \partial \tau / \partial x'$, $v = \partial \tau / \partial t$, $d\tau = u dx' + v dt$, $D(\tau, t) / D(x', t) = u \neq 0$. Изолиния $\tau = \tau_i = \text{const}$ имеет скорость $M = dx' / dt = -v(\tau_i, t) / u(\tau_i, t)$.

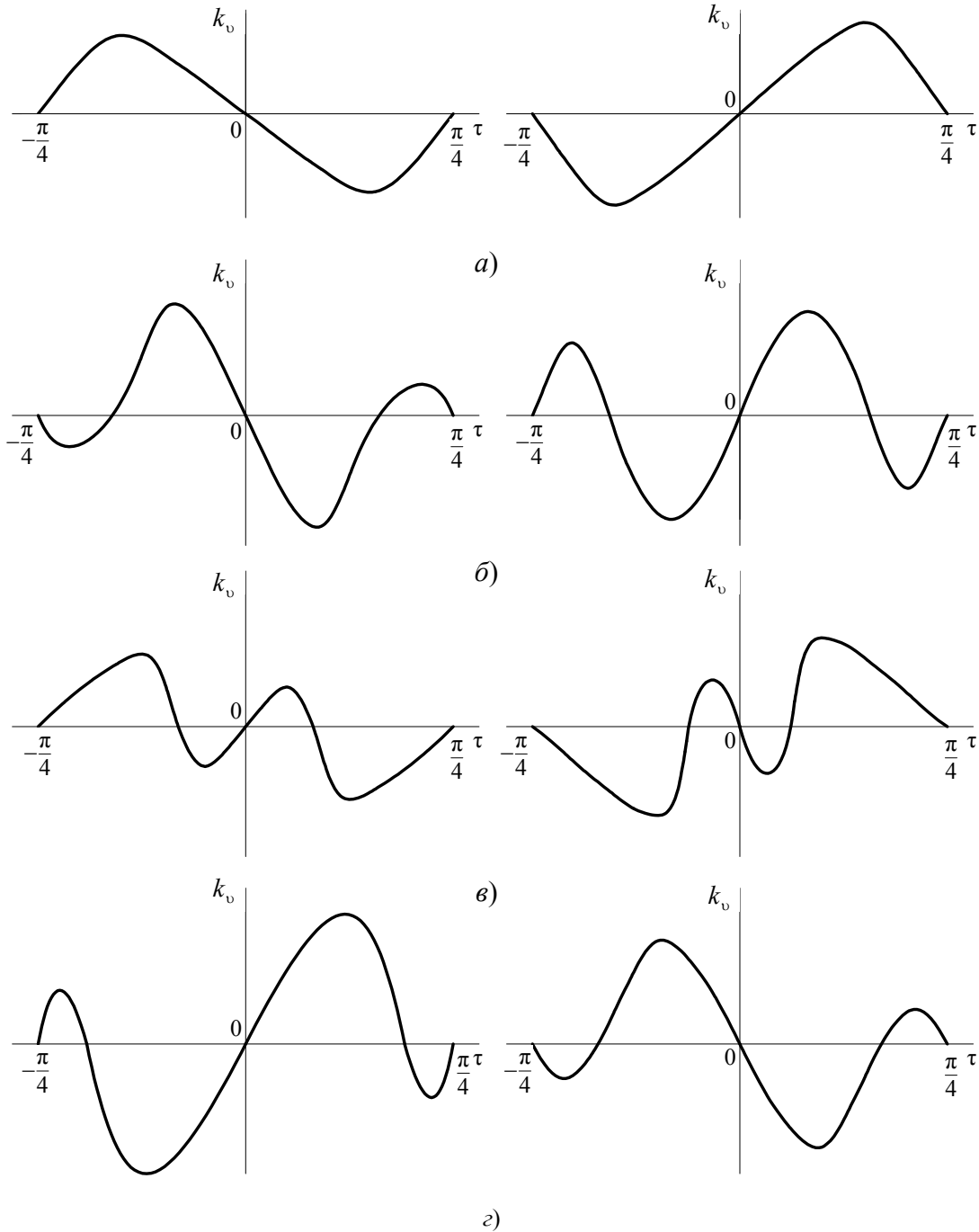


Рис. 1. Возможные варианты поведения источника (5), генерирующего волну переброса вида (6), (7). Левый столбец – сверхзвуковой процесс: $a - k_4 = -2, k_8 = -1/2$; $б - k_4 = -3/2, k_8 = -1$; $в - k_4 = -1, k_8 = 1$; $г - k_4 = 1, k_8 = 1$. Правый столбец – дозвуковой процесс: $a - k_4 = 6/5, k_8 = 1/2$; $б - k_4 = 3/2, k_8 = 1$; $в - k_4 = 1/2, k_8 = -1/2$; $г - k_4 = -1, k_8 = -2$

Бегущая волна переброса

Примем $\varepsilon \neq 0$, $k_v = k_v(\tau)$ и рассмотрим автомодельный случай $u = u(\tau)$, $v = v(\tau)$, для которого $v = -uM$, $\tau = \tau(\zeta)$, $\zeta = x' - Mt$, $M = N/w \equiv \text{const}$, $N = dx/dt$. Скорость волны $\zeta = \text{const}$ дозвуковая, если $0 < M < 1$; скорость волны сверхзвуковая при $M > 1$. Применяя в (3) обозначение $U = u^2/2$ и подставляя это выражение θ в (2), получим корреляцию $U \leftrightarrow k_v(\tau)$:

$$\frac{d}{d\tau} \left[U \left(M^2 - 1 - \varepsilon \chi^2 \frac{d^2 U}{d\tau^2} \right) \right] - \varepsilon \chi^2 U \frac{d^3 U}{d\tau^3} = k_v. \quad (4)$$

Выбирая подходящим образом функцию $U(\tau)$ и интегрируя соотношение $d\zeta = d\tau/(2U)^{1/2}$, можем получить физически интересные функции источников $k_v(\tau)$ (см. [15]).

Пример: источник типа «двойной синус-Гордон». Если $(2U)^{1/2} = A_1^2 \cos 2\tau$, $A_1^2 = \text{const}$, то источник имеет вид:

$$k_v = k_4 \sin 4\tau + k_8 \sin 8\tau; \quad k_4, k_8 = \text{const}. \quad (5)$$

Тогда решение представляет собой волну переброса – кинк, описывающий переход между двумя состояниями равновесия системы «среда – источник»:

$$\tau = \arctg \frac{A_1(C_1 E + 1)}{A_2(C_1 E - 1)}, \quad E = \exp(2A_1 A_2 \zeta), \quad C_1 = \text{const}. \quad (6)$$

Здесь $A_1^2 = A_2^2$, т. е. $A_1/A_2 = \pm 1$; аргументом арктангенса является дробная рациональная функция экспоненты E . Например, при $A_1 = A_2$ имеем: $\zeta \in (-\infty, \infty)$; $\zeta \rightarrow -\infty$, $\tau \rightarrow (-\pi/4)$; $\zeta \rightarrow \infty$, $\tau \rightarrow \pi/4$. Константы A_1^4 , M^2 связаны с параметрами источника (5) следующим образом:

$$A_1^4 = (-k_8/6\varepsilon\chi^2)^{1/2}, \quad \varepsilon k_8 < 0, \quad M^2 = 1 + (1/A_1^4) \left(\frac{4}{3} k_8 - k_4 \right). \quad (7)$$

Если $[(4k_8/3) - k_4] > 0$, то процесс сверхзвуковой, $M^2 > 1$. Дозвуковое движение кинка получаем при $[(4k_8/3) - k_4] < 0$, $(-k_8/6\varepsilon\chi^2) > [(4k_8/3) - k_4]^2$. Последнее неравенство будет выполнено при подходящем значении $\varepsilon\chi^2$. Источник (5) действует на интервале $\tau \in (-\pi/4, \pi/4)$ и обращается в ноль при $\tau = -\pi/4$; $\pi/4$. Другие корни вида $k_v(\tau = \tau_0) = 0$, если они существуют, подсчитываются по формуле $4\tau_0 = \pm \arccos(-k_4/2k_8)$. Перечислим условия существования таких корней. Сверхзвуковой процесс: 1) $\varepsilon < 0$, $k_8 > 0$, $0 < k_4 < (4k_8/3)$, $\cos 4\tau_0 < 0$; 2) $\varepsilon < 0$, $k_8 > 0$, $0 < (-k_4) < 2k_8$, $\cos 4\tau_0 > 0$; 3) $\varepsilon > 0$, $k_8 < 0$, $2k_8 < k_4 < (4k_8/3)$, $\cos 4\tau_0 < 0$. Дозвуковой процесс: 1) $\varepsilon < 0$, $k_8 > 0$, $(4k_8/3) < k_4 < 2k_8$, $\cos 4\tau_0 < 0$; 2) $\varepsilon > 0$, $k_8 < 0$, $(4k_8/3) < k_4 < 0$, $\cos 4\tau_0 < 0$; 3) $\varepsilon > 0$, $k_8 < 0$, $0 < k_4 < (-2k_8)$, $\cos 4\tau_0 > 0$. На рис. 1 хорошо видно влияние параметров k_4 , k_8 на наклон функции источника в точке $\tau = 0$: $(dk_v/d\tau)_{\tau=0} = 4k_4 + 8k_8$. Формулу (7) можно записать так:

$$M^2 = 1 + \varepsilon_1 \left(\frac{4}{3} k_8 - k_4 \right) \sqrt{6}, \quad \varepsilon_1 = (-\varepsilon \chi^2 / k_8)^{1/2},$$

где ε_1 – безразмерный параметр нелокальности среды. Отсюда ясно, что в сверхзвуковом режиме $\partial(M^2)/\partial\varepsilon_1 > 0$, а в дозвуковом режиме $\partial(M^2)/\partial\varepsilon_1 < 0$. Зависимость M^2 от параметра источника k_8 немонотонная: при $k_8 = (-3k_4/4)$ функция $M^2(k_8)$ достигает минимум/максимум в сверхзвуковом/дозвуковом режимах движения (рис. 2). Для тех случаев, когда $(M^2)_{\min}$, $(k_8 > 0, \varepsilon < 0)$ и $(M^2)_{\max}$, $(k_8 < 0, \varepsilon > 0)$ существуют, функция источника имеет вид:

$$k_v = 2k_8 \sin 4\tau \left[\cos 4\tau - \frac{2}{3} \right].$$

Следовательно, источники, соответствующие режимам $M^2 > 1$ и $0 < M^2 < 1$, различаются знаками параметра k_8 : наблюдается инверсия областей $k_v < 0$ и $k_v > 0$.

Отметим отдельный вариант $k_4 = 0$, для которого нелокальное волновое уравнение (1) с источником синус-Гордона $k_v = k_8 \sin 8\tau$ имеет кинк-решение (6), (7).

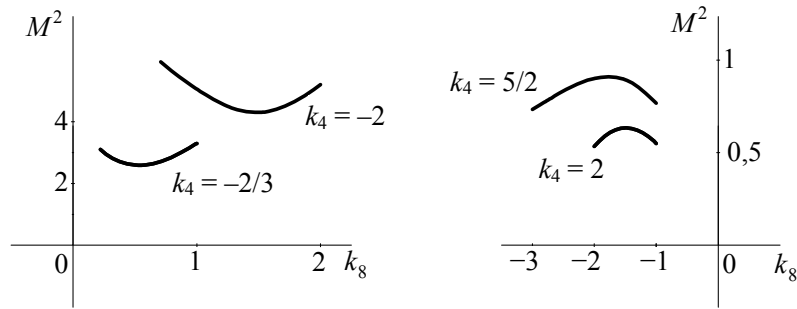


Рис. 2. Примеры немонотонных зависимостей квадрата скорости волны переброса (6), (7) от параметра источника k_8 . Левая часть рисунка – сверхзвуковой процесс, $6\epsilon\chi^2 = -1$. Правая часть рисунка – дозвуковой процесс: для верхней линии $6\epsilon\chi^2 = 1/20$; для нижней линии $6\epsilon\chi^2 = 1/10$

Полиномиальная нелинейность источника

Пусть $2U = (a + b\tau)(G + H\tau)^3 \varepsilon_1^{-1/2}$, $\varepsilon_1 = |\varepsilon\chi^2|$, $a, b, G, H - \text{const}$.

Решение имеет вид уединенной волны:

$$\tau = \frac{4a\varepsilon_1^{1/2} + \zeta^2 \tau_1 H^3 (a + b\tau_1)^2}{\zeta^2 H^3 (a + b\tau_1)^2 - 4b\varepsilon_1^{1/2}}, \quad \tau_1 = -G/H, \quad \zeta \in (-\infty, \infty). \quad (8)$$

Если

$$a > 0, \quad b > 0, \quad G > 0, \quad H < 0, \quad (9)$$

то $\tau(\zeta = 0) = -a/b < 0$, $\tau(\zeta \rightarrow \pm\infty) = -G/H > 0$, и волна (8) есть впадина, симметричная относительно оси τ . Если

$$a > 0, \quad b < 0, \quad G > 0, \quad H > 0, \quad (10)$$

то волна (8) есть возвышение $\tau(\zeta = 0) = -a/b > 0$, $\tau(\zeta \rightarrow \pm\infty) = -G/H < 0$ (рис. 3).

Данный процесс генерируется источником:

$$k_v = H^2 (\tau - \tau_1)^2 (D_1 \tau + D_2 \tau^2 + D_3 \tau^3), \quad D_3 < 0, \quad (11)$$

$$D_1, D_2, D_3 - \text{const.}$$

Скорость волны определяется выражением

$$M^2 = 1 - \frac{\varepsilon \chi^2}{(|\varepsilon| \chi^2)^{1/2}} \frac{3 \tau_1 H^3 (5a^2 - 10 \tau_1 ab + b^2 \tau_1^2)}{(3a - \tau_1 b)}. \quad (12)$$

Константы a, b связаны с параметрами источника (11) следующим образом:

$$ab = -\frac{D_4}{30H^4}, \quad b^2 = -\frac{D_3}{24H^4}, \quad D_4 = D_2 + \frac{7}{4} \tau_1 D_3. \quad (13)$$

Здесь выбор знаков a, b соответствует вариантам (9) и (10). Пять констант D_1, D_2, D_3, G, H связаны одним соотношением

$$D_1 = \left(\frac{\tau_1 D_3}{24} - \frac{D_4}{10} \right)^{-1} \left[\frac{\tau_1 D_3}{8} \left(\frac{3}{16} \tau_1^2 D_3 + \frac{\tau_1 D_4}{6} - \frac{D_4^2}{5D_3} \right) + \frac{3}{10} D_4 \left(\frac{\tau_1 D_4}{2} - \frac{13}{48} \tau_1^2 D_3 - \frac{D_4^2}{15D_3} \right) \right]. \quad (14)$$

Порядок расчетов: задаем H, D_2, D_3, τ_1 ; затем вычисляем G, D_1, D_4 и находим a, b в соответствии с физическим содержанием задачи (рис. 3).

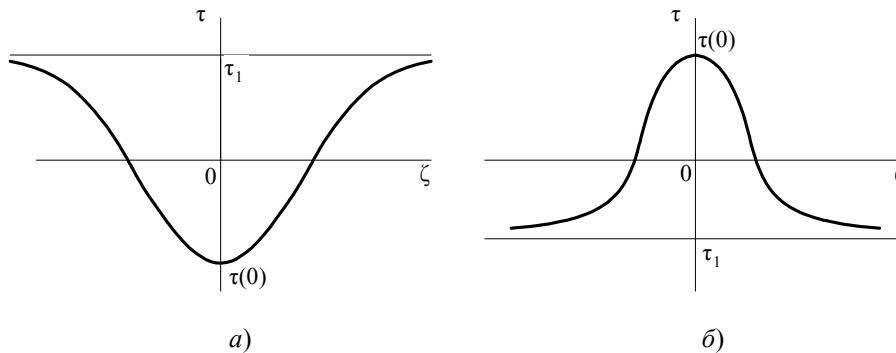


Рис. 3. Уединенная бегущая волна (8):
а – впадина; б – возвышение

Рассмотрим три частных случая. Если $G = 0$, т. е. $\tau_1 = 0$, то волна

$$\tau = 4a\varepsilon_1^{1/2} / [\zeta^2 a^2 H^3 - 4b\varepsilon_1^{1/2}] \quad (15)$$

движется со звуковой скоростью, $M^2 = 1$. Источник имеет вид (рис. 4):

$$k_v = H^2 D_3 \tau^3 (\tau - \tau_2)(\tau - \tau_3), \quad (16)$$

$$\tau_{2,3} = \frac{D_2}{2D_3} \left(-1 \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \right).$$

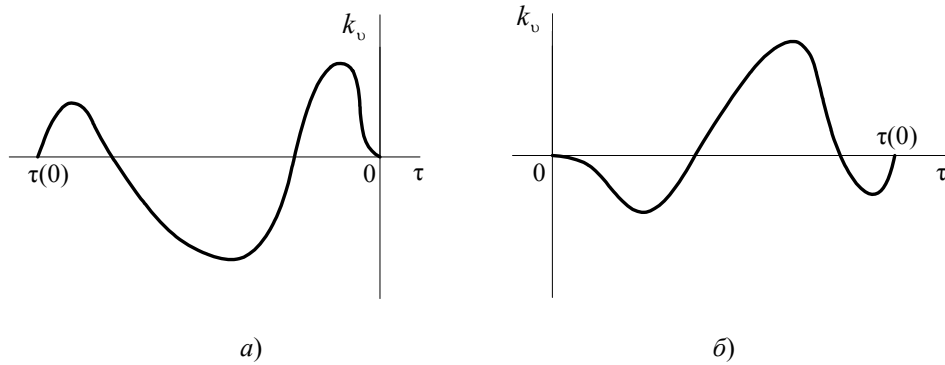


Рис. 4 Качественные свойства источника (16), генерирующего уединенные звуковые волны (15):
а – впадина; б – возвышение

Если $D_2 = 0$, то волна (8), (12) генерируется источником:

$$k_v = H^2 D_3 \tau (\tau - \tau_1)^2 (\tau^2 - \tau_2^2), \quad (17)$$

$$\tau_2 = (-D_1/D_3)^{1/2} = \tau_1 (29/20)^{1/2}, \quad \tau(0) = (-7/5)\tau_1.$$

Нетривиальные закономерности поведения функции (17) показаны на рис. 5.

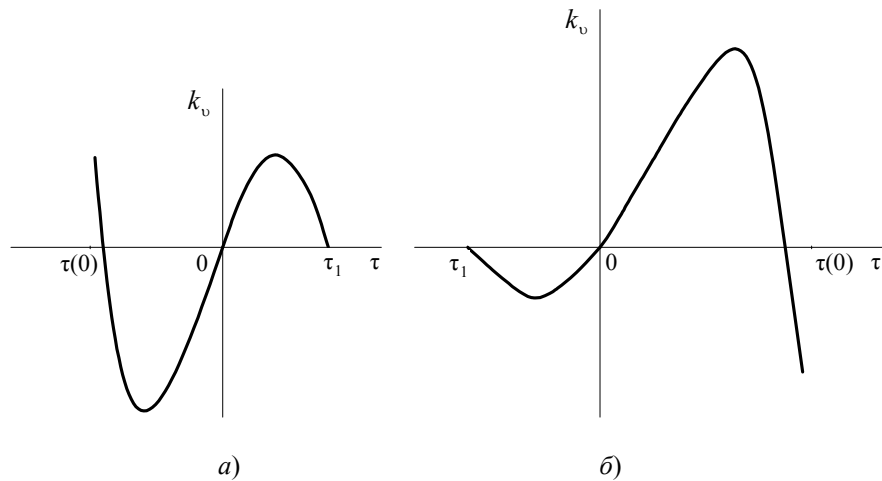


Рис. 5. Качественные свойства источника (17), генерирующего уединенные волны (8):
а – впадина; б – возвышение

Если $D_4 = 0$, то источник следующий:

$$k_v = H^2 D_3 (\tau - \tau_1)^2 (\tau - \tau_2)(\tau - \tau_3), \quad (18)$$

$$\tau_{2,3} = \frac{\tau_1}{8} (7 \pm \sqrt{13}).$$

Решение имеет вид (8), (12); $a = 0$, $\tau(0) = 0$. Свойства источника показаны на рис. 6.

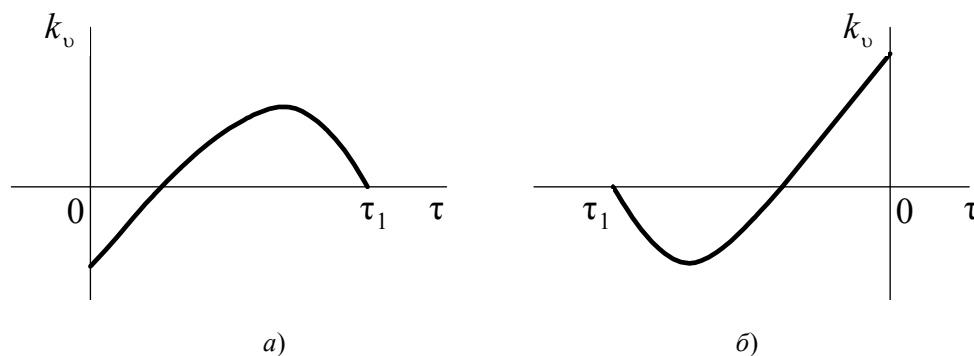


Рис. 6. Качественные свойства источника (18), генерирующего уединенные волны (8):
а – впадина; б – возвышение

Для основного варианта (14) функция источника (11) равна нулю в четырех точках:

$$\tau = 0, \quad \tau = \tau_1, \quad \tau = \tau_2, \quad \tau = \tau_3,$$

если уравнение $D_3\tau^2 + D_2\tau + D_1 = 0$ имеет два действительных корня τ_2, τ_3 . Здесь $D_3 < 0$, поэтому надо выполнить условие $D_1 > 0$. Это дает следующие оценки: для случая (9) должно быть $bG + 3aH < 0$, для случая (10) должно быть $bG + 3aH > 0$. В обоих случаях будем иметь $D_1 > 0$, если τ_1^2, D_3^2, D_4^2 удовлетворяют неравенствам

$$9\tau_1^2 D_3^2 < 16D_4^2 < 25\tau_1^2 D_3^2.$$

Такое значение D_4 можно всегда определить, выбирая подходящим образом константу D_2 [см. (13)]. Движение волны дозвуковое/сверхзвуковое при отрицательном/положительном значении $\epsilon\chi^2(5a^2 - 10\tau_1 ab + b^2\tau_1^2)$ [см. (12)]. Выбор знака M указывает направление движения волны. Неравенство $M^2 > 0$ выполнено в дозвуковом случае при достаточно малом $\epsilon_1^{1/2}$.

Заключение

Установлено, что нелокальное волновое уравнение (1) с источником (5) имеет точное кинк-решение (6). Изучена зависимость скорости движения волны переброса от параметра нелокальности среды. Рассмотрены дозвуковой и сверхзвуковой режимы движения волны. На рис. 1 и 2 представлены существенные физические различия в поведении системы «среда – источник» для $M^2 > 1$ и $0 < M^2 < 1$. Для источника энергии, обладающего полиномиальной (5-й степени) нелинейностью, построены уединенные волны типа «впадина»/«возвышение» (рис. 3). На примере трех характерных частных случаев (рис. 4–6) показано влияние области определения функции источника $k_v(\tau)$ на структуру профиля $\tau = \tau(\zeta)$ уединенных волн.

Данная работа является продолжением исследований [14–18].

Литература

1. Кардашев, Г. А. Физические методы интенсификации процессов химической технологии / Г. А. Кардашев. – М. : Химия, 1990. – 208 с.
2. Третьяков, Ю. Д. Введение в химию твердофазных материалов / Ю. Д. Третьяков, В. И. Путляев. – М. : Изд-во Моск. ун-та : Наука, 2006. – 400 с.

3. Жоу, Д. Расширенная необратимая термодинамика / Д. Жоу, Х. Касас-Баскес, Дж. Лебон. – Москва ; Ижевск : Ин-т компьютер. исслед., 2006. – 528 с.
4. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. – М. : Мир, 1988. – 694 с.
5. Табор, М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике / М. Табор. – М. : Эдиториал УРСС, 2001. – 320 с.
6. Структуры и хаос в нелинейных средах / Т. С. Ахромеева, С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий, А. А. Самарский. – М. : Физматлит, 2007. – 488 с.
7. Браун, О. М. Модель Френкеля-Конторовой / О. М. Браун, Ю. С. Кившарь. – М. : Физматлит, 2008. – 519 с.
8. Гурбатов, С. Н. Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. Приложения к нелинейной акустике : монография / С. Н. Гурбатов, О. В. Руденко, А. И. Саичев. – М. : Физматлит, 2008. – 496 с.
9. Полянин, А. Д. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев. – М. : Физматлит, 2002. – 432 с.
10. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер. – М. : Физматлит, 2007. – 736 с.
11. Кузнецова, М. Н. О нелинейных гиперболических уравнениях, связанных дифференциальными подстановками с уравнением Клейна-Гордона / М. Н. Кузнецова // Уфимский математический журнал. – 2012. – Т. 4, № 3. – С. 86–103.
12. Копылова, Е. А. Асимптотическая устойчивость солитонов для нелинейных гиперболических уравнений / Е. А. Копылова // Успехи математических наук. – 2013. – Т. 68, вып. 2. – С. 91–144. – DOI 10.4213/pm9509
13. Алфимов, Г. Л. Нелокальное уравнение синус-Гордона / Г. Л. Алфимов // Нелинейная динамика. – 2009. – Т. 5, № 4. – С. 585–602.
14. Шабловский, О. Н. Динамика неустойчивых решений волнового уравнения с источниками / О. Н. Шабловский // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2020. – Т. 12, № 4. – С. 51–61. – DOI 10.14529/mmph200406
15. Шабловский, О. Н. Примеры точных решений нелокального волнового уравнения с нелинейными источниками / О. Н. Шабловский // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2023. – Т. 15, № 4. – С. 30–37. – DOI 10.14529/mmph230404
16. Шабловский, О. Н. Нелокальность и возникновение резонансов в динамике волн / О. Н. Шабловский // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем. – М. : Янус-К, 2017. – Вып. 18. – С. 125–138.
17. Шабловский, О. Н. Волновое уравнение с кубической нелинейностью и возбуждение колебаний в системе «среда – источник» / О. Н. Шабловский // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2021. – Т. 13, № 4. – С. 44–56. – DOI 10.14529/mmph210406
18. Шабловский, О. Н. Нелинейные бегущие волны и «отрицательная теплоемкость» в среде с конкурирующими источниками / О. Н. Шабловский // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2020. – № 66. – С. 64–76.

References

1. Kardashev G. A. *Physical methods of intensification of chemical technology processes*. Moscow, Khimiya Publ., 1990. 208 p. (in Russian).
2. Tretyakov Yu. D., Putlyaev V. I. *Introduction to the chemistry of solid-phase materials*. Moscow, Moscow University press : Nauka, 2006. 400 p. (in Russian).

3. Jou D., Casas-Vazquez J., Lebon G. *Extended Irreversible Thermodynamics*. Moscow ; Izhevsk, Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2001. 462 p. (in Russian).
4. Dodd R. K., Eilbeck J. C., Gibbon J. D., Morris H. C. *Solitons and Nonlinear Wave Equations*. Moscow, Mir Publ., 1984. 630 p. (in Russian).
5. Tabor M. *Chaos and Integrability In Nonlinear Dynamics*. Moscow, Editorial URSS Publ., 1989. 384 p. (in Russian).
6. Akhromeeva T. S., Kurdyumov S. P., Malinetsky G. G., Samarsky A. A. *Structures and chaos in nonlinear media*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007. 488 p. (in Russian).
7. Brown O. M., Kishar Yu. S. *Model Frenkelya-Kontorovoy*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008. 519 p. (in Russian).
8. Gurbatov S. N., Rudenko O. V., Saichev A. I. *Waves and structures in nonlinear media without dispersion. Applications to nonlinear acoustics*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008. 496 p. (in Russian).
9. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. *Handbook of nonlinear equations of mathematical physics: Exact solutions*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2002. 432 p. (in Russian).
10. Sveshnikov A. G., Alshin A. B., Korpusov M. O., Pletner Yu. D. *Linear and nonlinear equations of the Sobolev type*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007. 736 p. (in Russian).
11. Kuznetsova M. N. On nonlinear hyperbolic equations connected by differential substitutions with the Klein-Gordon equation. *Ufimskii matematicheskii zhurnal*, 2012, vol. 4, no. 3, pp. 86–103 (in Russian).
12. Kopylova E. A. Asymptotic stability of solitons for nonlinear hyperbolic equations. *Uspekhi matematicheskikh nauk = Russian Mathematical Surveys*, 2013. vol. 68, no. 2, pp. 283–334 (in Russian). DOI 10.4213/rm9509
13. Alfimov G. L. Nonlocal sine-Gordon equation: kink solutions in the weak nonlocality limit. *Nelineinaya dinamika = Nonlinear Dynamics*, 2009, vol. 5, no. 4, pp. 585–602 (in Russian).
14. Shablovsky O. N. The dynamics of unstable solutions for the wave equation with sources. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta, The series Mathematics. Mechanics. Physics*, 2020, vol. 12, no. 4, pp. 51–61 (in Russian). DOI 10.14529/mmph200406
15. Shablovsky O. N. Examples of exact solutions of a non-local wave equation with nonlinear sources. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Fizika*, 2023, Vol. 15, no. 4, pp. 30–37 (in Russian). DOI 10.14529/mmph230404
16. Shablovsky O. N. The nonlocality and resonance emergence in the wave dynamics. *Fundamentalnyye fiziko-matematicheskiye problemy i modelirovaniye tekhniko-tehnologicheskikh system: sb. nauch. tr.* Moscow, Yanus-K. 2017, iss. 18, pp. 125–138 (in Russian).
17. Shablovsky O. N. The wave equation with cubic nonlinearity and excitation of oscillations in the "medium-source" system. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Fizika*, 2021, vol. 13, no. 4, pp. 44–56 (in Russian). DOI 10.14529/mmph210406
18. Shablovsky O. N. Nonlinear waves and "negative heat capacity" in a medium with competitive sources. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2020, no. 66, pp. 64–76 (in Russian).

Получена 16.12.2024 г.