Выводы. В работе представлено, что в определенных сегментах шейного отдела позвоночника при его движении возникают градиенты давления, вследствие этого в диске могут происходить изменения в геометрии клеток. Статическое сжатие также приводит к растяжению мембраны хондроцитов.

Литература

1. Длубаковская, А. В. Обработка прямотеневых рентгенофункциональных изображений с помощью разработанной программы “PDisk”/ А. В. Длубаковская, П. Д. Лис; науч. рук. О. А. Жарнова // Физика конденсированного состояния: материалы XXXI междунар. науч. - практ. конф. аспир., магистр. и студ. (Гродно, 13-14 апр. 2023 г.) / Учреждение образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»; гл. ред. Г. А. Гачко; редкол.: О. А. Жарнова [и др.]. – Гродно : ГрГУ им. Янки Купалы, 2023. – С. 170–172.

2. Жарнова, О.А. Биофизическая модель транспорта веществ в межпозвонковом диске шейного отдела позвоночника / О. А. Жарнова [и др.] // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2023. – Т. 13. – № 2. – С. 79–87.

3. Guilak, F. Compression-induced changes in the shape and volume of the chondrocyte nucleus / F. Guilak// J. Biomech – 1995. – Vol. 28(12) – P. 1529–1541.

А. Д. Тамков
(ГГТУ имени П. О. Сухого, Гомель)
Науч. рук. **В. Ю. Гавриш,** канд. физ.-мат. наук, доцент

АЛГЕБРА МАТРИЦ ДИРАКА В СЛУЧАЕ РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ $D \neq 4$

Введение. Известно [1], что взаимодействие фотонов с электронами успешно описывается квантовой электродинамикой (далее КЭД). Однако расчеты в высших порядках теории возмущений требуют привлечения дополнительных соотношений как из интегрального исчисления, так и теории специальных функций.

В работе изложены элементарные соотношения для матриц Дирака в случае размерности пространства-времени $d \neq 4$, используемые для расчета поправок в КЭД.

Лагранжиан КЭД. В разделе получим выражение для лагранжиана взаимодействия квантовой электродинамики с последующим анализом размерности волновых функций фотонов и фермионов.

Лагранжиан невзаимодействующих электронов (позитронов) и фотонов определяется из выражения [2]

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(x) \left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m \right) \psi(x) \right], \tag{1}$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$;

A_{ν} – ковариантный четырехпотенциал электромагнитного поля;

ψ – спинорное поле электронов (позитронов). Требование инвариантности лагранжиана КЭД

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(x) \left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m \right) \psi(x) \tag{2}$$

относительно локальных калибровочных преобразований

$$\psi'(x) = e^{i\lambda(x)}\psi(x),\ \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)e^{-i\lambda(x)} \tag{3}$$

приводит к появлению дополнительного слагаемого

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(x)\left(i\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu} + ieA_{\mu}\right) - m\right)\psi(x) \tag{4}$$

(сравните с (2)). Из (4) нетрудно получить выражение

$$S_{\text{int.}} = -e\int d^4x\ \bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}A_{\mu}\psi(x), \tag{5}$$

из которого следует лагранжиан взаимодействия КЭД с электромагнитным током перехода $j^{\mu} = \bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)$.

Поскольку в системе $\hbar = c = 1$ константа e, как и выражения для действий (1) и (5), безразмерна, ниже проведем анализ размерности полей A_{ν} и ψ:

$$0 = -4 + 2 + 2\left[A_{\mu}\right] \Rightarrow \left[A_{\mu}\right] = 1;\ \ 0 = -4 + 1 + 2[\psi] \Rightarrow [\psi] = \frac{3}{2}. \tag{6}$$

Дальнейшая процедура размерной регуляризации связана с обобщением размерности интегралов (1) и (5). Рассмотрим случай размерности $d = 4 - \varepsilon$: в этом случае выражение (5) примет вид

$$S_{\text{int.}} = -e\int d^dx\ \bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}A_{\mu}\psi(x), \tag{7}$$

а размерности полей определяются соотношениями [2]

$$\begin{gathered} 0 = -d + 2 + 2\left[A_{\mu}\right] \Rightarrow \left[A_{\mu}\right] = \frac{1}{2}(d-2) = 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \\ 0 = -d + 1 + 2[\psi] \Rightarrow [\psi] = \frac{1}{2}(d-1) = \frac{3}{2} - \varepsilon. \end{gathered} \tag{8}$$

Подстановка размерностей (8) в выражение (7) приводит к

$$[S_{\text{int.}}] = -d + [e] + 2[\psi] + A, \tag{9}$$

откуда для сохранения безразмерности действия $[S_{\text{int.}}] = 0$ требуется $[e] = \frac{\varepsilon}{2}$. Анализ полученных соотношений показывает, что обобщение размерности лагранжиана взаимодействия для случая $\boldsymbol{d} \neq 4$ требует повторный анализ соотношений для электрон-позитронных волновых функций и модификации математического аппарата описания спинорных свойств частиц.

Алгебра матриц Дирака для пространства $\boldsymbol{d} \neq 4$ мерного случая. Ниже приведем соотношения для различных комбинаций матриц Дирака [3]. Известно, что в случае размерности $\boldsymbol{d} = 4$ комбинации $\gamma_{\mu}\hat{A}_1\hat{A}_2 \ldots \gamma^{\mu}$, где $\hat{A}_i = \left(A_{\alpha}\gamma^{\alpha}\right)_i$ – свертка 4-вектора A_{α}

с матрицами Дирака, используются для расчета процессов КЭД в низших порядках теории возмущений. В разделе определим подобные свертки для общего случая размерности пространства-времени $\boldsymbol{d} \neq 4$.

Базовое соотношение для матриц Дирака – антикоммутационное соотношение [3]

$$\gamma^{\mu}\gamma\nu \ +\gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2g^{\mu\nu}, \tag{10}$$

которое должно выполнятся для любой размерности пространства-времени. Из соотношения (10) определим значение $\gamma^{\mu}\gamma_{\mu}$:

$$\gamma^{\mu}\gamma_{\mu} = \gamma^{\mu}g_{\mu\nu}\gamma^{\nu} = g_{\mu\nu}\left(2g^{\mu\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right) = 2g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} - \gamma_{\mu}\gamma^{\mu}, \tag{11}$$

откуда $\gamma^{\mu}\gamma_{\mu} = g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$, или с учетом структуры метрического тензора [3] окончательно получаем $\gamma^{\mu}\gamma_{\mu} = d$.

По аналогии определим $\gamma^{\mu}\hat{A}\gamma_{\mu}$:

$$\begin{gathered}\gamma^{\mu}\hat{A}\gamma_{\mu} = A_{\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma_{\mu} = A_{\nu}\left(2g^{\mu\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right)\gamma_{\mu} = \\ = 2A_{\nu}g^{\mu\nu}\gamma_{\mu} - A_{\nu}\gamma^{\nu}\underbrace{\gamma^{\mu}\gamma_{\mu}}_{d} = 2\hat{A} - \hat{A}d = \hat{A}\left(2-d\right).\end{gathered} \tag{12}$$

Отметим, что если ответ выражения (12) записать в виде

$$\hat{A}\left(2-d\right) = -2\hat{A} + \left(4-d\right)\hat{A},$$

то при $\boldsymbol{d} = 4$ получаем известное соотношение $\gamma^{\mu}\hat{A}\gamma_{\mu} = -2\hat{A}$.

Наконец вычислим комбинацию $\gamma^{\mu}\hat{A}_1\hat{A}_2\gamma_{\mu}$, которая достаточно часто используется при расчетах однопетлевых поправок КЭД:

$$\begin{gathered}\gamma^{\mu}\hat{A}_1\hat{A}_2\gamma_{\mu} = \gamma^{\mu}\hat{A}_1\left(2\left(A_2\right)_{\mu} - \gamma_{\mu}\hat{A}_2\right) = 2\hat{A}_2\hat{A}_1 - \gamma^{\mu}\hat{A}_1\gamma_{\mu}\hat{A}_2 = \\ = 2\hat{A}_2\hat{A}_1 - 2\hat{A}_1\hat{A}_2 + d\,\hat{A}_1\hat{A}_2.\end{gathered} \tag{13}$$

Последнее соотношение может быть записано в виде

$$\gamma^{\mu}\hat{A}_1\hat{A}_2\gamma_{\mu} = 2\hat{A}_2\hat{A}_1 - 2\hat{A}_1\hat{A}_2 + d\,\hat{A}_1\hat{A}_2 = 4\left(A_1 \cdot A_2\right) + \left(d-4\right)\hat{A}_1\hat{A}_2, \tag{14}$$

что соответствует соотношению $\gamma^{\mu}\hat{A}_1\hat{A}_2\gamma_{\mu} = 4\left(A_1 \cdot A_2\right)$ для случая размерности пространства-времени $\boldsymbol{d} = 4$.

Отметим, что полученные в разделе выражения могут быть использованы для расчета следов произведения γ – матриц Дирака, в том числе с матрицей γ_5.

Заключение. В работе представлена элементарные соотношения из алгебры матриц Дирака для случая размерности пространства-времени $\boldsymbol{d} \neq 4$. Полученные в работе соотношения могут быть использованы как при расчете поляризации вакуума, так и однопетлевых вкладов в вершинную функцию КЭД.

Литература

1. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика в 10 томах. Т. 4 Квантовая электродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц // 3-е изд. испр. – Москва: Наука, 1989. – 728 с.

2. Пенскин, М. Введение в квантовую теорию поля / М. Пескин, Д. Шредер // Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 784 с.

3. Jorge C. Romao. Modern techniques for one-loop calculation / Romao, J. C. – Departamento de Fisica, Instituto Superior Tecnico, Portugal, 2004. – 81 p.

А. Д. Тамков
(ГГТУ имени П. О. Сухого, Гомель)
Науч. рук. **В. Ю. Гавриш,** канд. физ.-мат. наук, доцент

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ФЕЙНМАНА ДЛЯ РАСЧЕТА ПЕТЛЕВЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Введение. Вычисление наблюдаемых величин в высших порядках теории возмущений является нетривиальной задачей. Подобные расчеты требуют привлечения теории функции комплексного переменного, а также непростых соотношений интегрального и дифференциального исчисления.

В работе кратко излагается методика расчета петлевых интегралов, основанная на размерной регуляризации [1] совместно с параметризацией Фейнмана [2].

Скалярный однопетлевой интеграл в *d*-мерном пространстве. Характерный скалярный однопетлевой интеграла может быть записан в виде

$$I_{r,m} = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q^{2^r}}{\left(q^2 - C + i\varepsilon\right)^m}, \qquad (1)$$

где r, m – некоторые неотрицательные числа.

Анализ выражения (1) показывает, что расчеты связаны с интегрированием по телесному углу d – мерного вектора q. Рассмотрим интеграл

$$\int d^d x = \int d|x| |x|^{d-1} d\Omega_{d-1}, \qquad (2)$$

где $|x| = \sqrt{(x^0)^2 + |\vec{x}|^2}$ – модуль вектора x;

$d\Omega_{d-1}$ – элемент телесного угла.

Использование интегрального представления Γ – функции Эйлера [3]

$$\Gamma(n) = \int t^{n-1} e^{-t} dt \qquad (3)$$

приводит к

$$\int d\Omega_{d-1} = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}. \qquad (4)$$

Дальнейшее вычисление интеграла (1) проведем из выражения