

ISSN 1561-2430 (Print)
 ISSN 2524-2415 (Online)
 УДК 539.12
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-4-315-327>

Поступила в редакцию 28.06.2023
 Received 28.06.2023

В. Ю. Гавриш¹, В. В. Андреев²

¹Гомельский Государственный технический университет имени П. О. Сухого,
 Гомель, Республика Беларусь

²Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Гомель, Республика Беларусь

ДВУХФОТОННЫЙ РАСПАД ПСЕВДОСКАЛЯРНОГО МЕЗОНА В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАРКОВОЙ МОДЕЛИ

Аннотация. В релятивистской кварковой модели, основанной на точечной форме пуанкаре-инвариантной квантовой механики, получено интегральное представление форм-фактора псевдоскалярного $P^0(\pi^0, \eta, \eta')$ -мезона распада $P^0(q\bar{q}) \rightarrow \gamma\gamma$ с учетом аномальных магнитных моментов u -, d - и s -кварков. В развитом формализме вычислены значения конститuentных масс кварков и параметров волновых функций с использованием константы f_{P^\pm} лептонного распада $P^\pm(q\bar{Q}) \rightarrow \ell^\pm \nu_{\ell^\pm}$ и константы псевдоскалярной плотности g_{P^\pm} . Показано, что учет глюонной компоненты в η/η' -мезонах и использование структурных функций кварков легкого сектора приводит к согласующемуся с современными экспериментальными данными поведению форм-факторов псевдоскалярных π^0 -, η - и η' -мезонов в области малых переданных лептонной паре импульсов.

Ключевые слова: пуанкаре-инвариантная квантовая механика, точечная форма динамики, кварк, мезон, магнитный момент, радиационный распад, форм-фактор

Для цитирования. Гавриш, В. Ю. Двухфотонный распад псевдоскалярного мезона в релятивистской кварковой модели / В. Ю. Гавриш, В. В. Андреев // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2023. – Т. 59, № 4. – С. 315–327. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-4-315-327>

Vadzim Y. Haurysh¹, Viktor V. Andreev²

¹Sukhoi State Technical University of Gomel, Gomel, Republic of Belarus

²Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Republic of Belarus

TWO-PHOTON DECAY OF THE PSEUDOSCALAR MESON IN THE RELATIVISTIC QUARK MODEL

Abstract. In the relativistic quark model, based on the point form of Poincaré-invariant quantum mechanics, an integral representation of the form-factor of the pseudoscalar $P^0(\pi^0, \eta, \eta')$ meson of $P^0(q\bar{q}) \rightarrow \gamma\gamma$ decay is obtained taking into account the anomalous magnetic moments of u -, d - and s -quarks. In the developed formalism the values of the constituent quark masses and the parameters of the wave functions are calculated using the lepton decay $P^\pm(q\bar{Q}) \rightarrow \ell^\pm \nu_{\ell^\pm}$ constant f_{P^\pm} and the pseudoscalar density constant g_{P^\pm} . It is shown that taking into account the gluonium component in η/η' -mesons and using the structure functions of light sector quarks lead to the behavior of the form factors of pseudoscalar π^0 -, η -, η' -mesons in the area of a small transferred momentum to the lepton pair, which is consistent with the modern experimental data.

Keywords: Poincaré-invariant quantum mechanics, point form of dynamics, quark, meson, magnetic moment, radiative decay, form-factor.

For citation. Haurysh V. Y., Andreev V. V. Two-photon decay of the pseudoscalar meson in the relativistic quark model. *Vesti Natsyuanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2023, vol. 59, no. 4, pp. 315–327 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-4-315-327>

Введение. После установления структурных свойств адронов в физике элементарных частиц постепенно переходят к изучению аналогичных характеристик конститuentных кварков, которые формируют адроны. Основной метод получения таких характеристик состоит в исследовании характеристик связанных систем кварков, поскольку кварки не наблюдаются в свободном состоянии (в отличие от барионов и мезонов).

В частности, для π^0 -, η - и η' -мезонов требуется привлечение соответствующих моделей, поскольку такие системы являются релятивистскими. Сопоставление вычислений моделей с экспериментальными данными дает возможность не только получить информацию о структурных характери-

стиках кварков, но и исследовать физические свойства короткоживущих мезонов. Предметом исследования работы являются электромагнитные форм-факторы псевдоскалярных π^0 -, η - и η' -мезонов с учетом обновления экспериментальных данных коллаборациями BESIII, A2, NA62 и BaBar [1–5].

В указанном направлении исследований определенный интерес представляют псевдоскалярные η - и η' -мезоны, поскольку в кварковых моделях вопрос о выборе схемы смешивания $s\bar{s}$ -состояния исследуется достаточно долго. Так, расчеты с одним углом смешивания θ_p в различных подходах приводят к разбросу значений в широком интервале $\theta_p \in [-20^\circ, -9^\circ]$ (см., напр., [6]), что стимулировало использование других схем смешивания псевдоскалярных η - и η' -мезонов. В работе [7], основанной на методе аппроксимации Паде, авторы используют зависимость значения угла θ_p и массы связанных η - η' -состояний, а также возможность смешивания π^0 - и η' -мезонов. В [8] в рамках скрытой локальной симметрии полагается существование η'' -состояния и, как следствие, наличие дополнительных углов смешивания. Однако наиболее успешным был подход с использованием глюонной компоненты (см. [9, 10]), который также был использован при анализе экспериментальных данных коллаборацией KLOE [11]. Отметим, что исследование псевдоскалярных и векторных мезонов проводилось не только с учетом глюонной компоненты, но и аномальными магнитными моментами легких кварков [12].

Среди многообразия методов описания релятивистских составных кварковых систем выделим подход, основанный на использовании представлений группы Пуанкаре [13, 14]. Поскольку в таком формализме основным требованием является условие сохранения пуанкаре-инвариантности для систем без взаимодействия и для взаимодействующих частиц, подход получил название «пуанкаре-инвариантная квантовая механика» (далее ПиКМ). В зависимости от способа включения оператора взаимодействия в ПиКМ выделяют 3 эквивалентные формы: мгновенную, точечную и динамику на световом фронте.

В настоящее время все 3 формы динамики используются для исследования составных кварковых систем. Так, в динамике на световом фронте исследование форм-факторов двухфотонного распада $P^0(q\bar{q}) \rightarrow \gamma\gamma^*$ проведено в системах отсчета $q^+ = 0$ и $q^+ \neq 0$ [15]. В частности показано, что в системе $q^+ \neq 0$ модель наиболее эффективно описывает поведение форм-фактора во времениподобной области. Однако в проведенных вычислениях используется схема смешивания с одним углом θ_p , что противоречит современным экспериментальным данным [11]. Учет глюонных эффектов в динамике на световом фронте также предлагался и ранее при описании π^0 -, η - и η' -мезонов [16].

Изучение мезонов легкого сектора в мгновенной форме динамики проведено в [17, 18]. Авторами работ показано, что расчет форм-факторов псевдоскалярных мезонов может быть выполнен с использованием осцилляторной волновой функции. Особенностью вычислений является учет аномальных магнитных моментов конститuentных кварков κ_u и κ_d .

Исследование составных кварковых систем в моделях, основанных на точечной форме динамики, представлены в меньшем объеме. Расчеты в этой форме динамики, как и в ее модификациях [19, 20], отличаются от экспериментальных данных: так, в [20] показано расхождение между экспериментальными данными и теоретическими расчетами для различных значений масс конститuentных кварков. Из указанного следует, что дальнейшее развитие точечной формы динамики является важной и актуальной задачей.

Следует также упомянуть, что КХД потенциал зависит от значительного числа параметров (см., напр., [21, 22]), поэтому в любой форме динамики важным является метод определения базовых параметров модели. Так, в [23] использовались параметры, полученные из условия соответствия среднеквадратичных радиусов π^\pm - и K^\pm -мезонов без решения уравнения движения для составных релятивистских систем; в [24] использовались различные схемы расчета параметров модели из лептонных распадов π^\pm - и ρ^\pm -мезонов также без учета явного вида кварк-антикваркового потенциала.

Отметим, что учет структурных функций кварков необходим. Так, для корректного описания экспериментальных данных по магнитным моментам барионов в составных кварковых моделях требуется привлечение аномальных магнитных моментов кварков, что также косвенно подтверждает наличие их структуры [25, 26].

Настоящая работа посвящена исследованию электромагнитных форм-факторов нейтральных псевдоскалярных $P^0(q\bar{q})$ -мезонов процесса $P^0(q\bar{q}) \rightarrow \gamma\gamma^*$ в релятивистской кварковой модели, основанной на точечной форме ПиКМ.

1. Описание модели. Вектор состояния мезона массы M , спина J и 4-импульса $Q^\mu = \{\omega_M(\mathbf{Q}), \mathbf{Q}\}$, $Q^2 = M^2$ в точечной форме ПиКМ определяется с помощью базиса унитарных представлений группы Пуанкаре. В релятивистской кварковой модели мезон описывается с помощью базиса прямого произведения двухчастичного представления. Пусть вектор $|\mathbf{p}_1, \lambda_1, a, \mathbf{p}_2, \lambda_2, b\rangle$ описывает состояние кварков с массами $m_q, m_{\bar{q}}$, импульсами $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$, проекциями спинов λ_1, λ_2 и цветовыми квантовыми числами a и b соответственно. Согласно ПиКМ, вектор состояния мезона в таком базисе определяется интегралом по импульсу относительного движения \mathbf{k} [13, 27] как

$$|\mathbf{Q}, J\mu, M\rangle = \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \sum_{v_1, v_2} \int d\mathbf{k} \Phi_{\ell S}^J(\mathbf{k}, \beta_{q\bar{q}}) \Omega \begin{pmatrix} \ell & S & J \\ v_1 & v_2 & \mu \end{pmatrix} (\theta_{\mathbf{k}}, \phi_{\mathbf{k}}) \times \sqrt{\frac{\omega_{m_q}(\mathbf{p}_1)\omega_{m_{\bar{q}}}(\mathbf{p}_2)}{\omega_{m_q}(\mathbf{k})\omega_{m_{\bar{q}}}(\mathbf{k})V_0}} D_{\lambda_1, v_1}^{1/2}(\mathbf{n}_{W_1}) D_{\lambda_2, v_2}^{1/2}(\mathbf{n}_{W_2}) |\mathbf{p}_1, \lambda_1, a, \mathbf{p}_2, \lambda_2, b\rangle. \quad (1)$$

В выражении (1) для краткости использованы обозначения

$$V_0 = \omega_{M_0}(Q) / M_0,$$

$$\Omega \begin{pmatrix} \ell & S & J \\ v_1 & v_2 & \mu \end{pmatrix} (\theta_{\mathbf{k}}, \phi_{\mathbf{k}}) = Y_{\ell m}(\theta_{\mathbf{k}}, \phi_{\mathbf{k}}) C \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & S \\ v_1 & v_2 & \mu \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} \ell & S & J \\ m & \lambda & \mu \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $Y_{\ell m}(\theta_{\mathbf{k}}, \phi_{\mathbf{k}})$ – сферические функции, определяемые углами вектора \mathbf{k} , $C \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & S \\ v_1 & v_2 & \mu \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} \ell & S & J \\ m & \lambda & \mu \end{pmatrix}$ – коэффициенты Клебша – Гордана группы $SU(2)$, $D_{\lambda, v}^{1/2}(\mathbf{n}_W)$ – функции вращения Вигнера [27] и $M_0 = \omega_{m_q}(\mathbf{k}) + \omega_{m_{\bar{q}}}(\mathbf{k})$ – инвариантная масса конститuentных кварков. Волновая функция в (1) нормирована условием

$$\sum_{\ell, S} \sum_{a, b} \int d\mathbf{k} k^2 \left| \Phi_{\ell S}^J(\mathbf{k}, \beta_{q\bar{q}}) \right|^2 = 1. \quad (3)$$

Для описания характеристик легких псевдоскалярных P и векторных мезонов V в релятивистской кварковой модели используются следующие параметры:

- массы конститuentных кварков m_u, m_d и m_s ;
- $\beta_{q\bar{q}}^I$ – параметры пробных волновых функций, $q, \bar{q} = u, d, s$ и $I = P, V$;
- магнитные моменты кварков $\mu_{q, \bar{q}}$ с учетом аномальных магнитных моментов $\kappa_{q, \bar{q}}$

$$\mu_{q, \bar{q}} = \frac{e_{q, \bar{q}}}{2m_{q, \bar{q}}} (1 + \kappa_{q, \bar{q}}) \quad (4)$$

и их электромагнитные радиусы $\langle r_q^2 \rangle$;

- параметры, описывающие смешивание кварковых состояний в связанных системах.

Ниже приведем оригинальную методику вычисления базовых параметров в развитом формализме.

2. Методика определения параметров модели. Изложим методику определения значений параметров волновых функций и конститuentных масс кварков. На первом этапе из условия соответствия теоретических расчетов с экспериментальными данными определим значения конститuentных масс u -, d - и s -кварков с соответствующими параметрами пробных волновых функций. Далее с использованием полученных значений проведем вычисление других экспери-

ментально измеримых характеристик мезонов, совместно с вычислением структурных характеристик конститuentных кварков.

В развитом формализме авторами были получены интегральные представления константы лептонного распада псевдоскалярного ($I = P$) и векторного ($I = V$) мезонов в точечной форме ПиКМ [28–32]:

$$f_I(m_q, m_{\bar{Q}}, \beta_{q\bar{Q}}^I) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\pi} \int dk k^2 \Phi(k, \beta_{q\bar{Q}}^I) \sqrt{\frac{W_{m_q}^+(\mathbf{k})W_{m_{\bar{Q}}}^+(\mathbf{k})}{M_0 \omega_{m_q}(\mathbf{k})\omega_{m_{\bar{Q}}}(\mathbf{k})}} \times \left(1 + a_1 \frac{k^2}{W_{m_q}^+(\mathbf{k})W_{m_{\bar{Q}}}^+(\mathbf{k})} \right); \quad a_P = -1, \quad a_V = 1/3, \quad (5)$$

где

$$W_m^\pm(\mathbf{k}) = \omega_m(\mathbf{k}) \pm m, \quad \omega_m(\mathbf{k}) = \sqrt{k^2 + m^2}, \quad |\mathbf{k}| = k, \quad a_P = -1, \quad a_V = 1/3. \quad (6)$$

Интегральное представление константы распада g_{P^\pm} в точечной форме ПиКМ [30] определяется следующим соотношением:

$$g_P(m_q, m_{\bar{Q}}, \beta_{q\bar{Q}}^P) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\pi} \int dk k^2 \Phi(k, \beta_{q\bar{Q}}^I) \sqrt{M_0} \left(W_{m_q}^+(\mathbf{k})W_{m_{\bar{Q}}}^+(\mathbf{k}) + W_{m_q}^-(\mathbf{k})W_{m_{\bar{Q}}}^-(\mathbf{k}) \right). \quad (7)$$

Выражение (5) совместно с

$$g_P = \frac{M_P^2 f_P}{(\hat{m}_q + \hat{m}_{\bar{Q}})}, \quad (8)$$

где $\hat{m}_{q, \bar{Q}}$ – токовые массы кварков, входящих в псевдоскалярный мезон $P^\pm(q\bar{Q})$, дает возможность определить параметры модели мезонов легкого сектора.

Для определения масс кварков и параметров волновых функций будем использовать лептонные распады псевдоскалярных π^\pm - и K^\pm -мезонов. Требование соответствия модельных расчетов и экспериментальных данных для константы распада $f_{\pi^\pm}^{(\text{экс})}$ псевдоскалярного π^\pm -мезона с массой $M_{\pi^\pm}^{(\text{экс})}$ приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} 1/2(\hat{m}_u + \hat{m}_d) = (3,45 \pm 0,42) \text{ МэВ}, \\ f_P(m_u, m_d, \beta_{u\bar{d}}^P) = f_{\pi^\pm}^{(\text{экс})}, \\ (\hat{m}_u + \hat{m}_d)g_P(m_u, m_d, \beta_{u\bar{d}}^P) = f_{\pi^\pm}^{(\text{экс})} \left(M_{\pi^\pm}^{(\text{экс})} \right)^2. \end{cases} \quad (9)$$

Использование осцилляторной волновой функции

$$\Phi(k, \beta_{q\bar{Q}}^I) = \frac{2}{\sqrt{3} \pi^{1/4} (\beta_{q\bar{Q}}^I)^{3/2}} \exp \left[-\frac{k^2}{2(\beta_{q\bar{Q}}^I)^2} \right] \quad (10)$$

совместно с значениями токовых масс u - и d - кварков приводит к следующим значениям базовых параметров модели, основанной на точечной форме ПиКМ:

$$m_u = (219,48 \pm 9,60) \text{ МэВ}, \quad m_d = (221,98 \pm 9,60) \text{ МэВ}, \quad \beta_{u\bar{d}}^P = (367,93 \pm 2,51) \text{ МэВ}. \quad (11)$$

При решении системы (9) полагалось слабое нарушение изотопической инвариантности $\Delta_{du} = \hat{m}_d - \hat{m}_u = m_d - m_u = 2,5 \text{ МэВ}$. Такое предположение приводит к тому, что параметры волновой функции $\beta_{q\bar{Q}}^{P,V}$ для $q, \bar{Q} = u, d$ также будут отличаться на величину, близкую к Δ_{du} :

$$\begin{aligned} \beta_{dd}^V &= \beta_{ud}^V - \Delta_{du} / 2, & \beta_{uu}^V &= \beta_{ud}^V + \Delta_{du} / 2, \\ \beta_{ds}^V &= \beta_{us}^V - \Delta_{du} / 2, & \beta_{ds}^P &= \beta_{us}^P - \Delta_{du} / 2. \end{aligned} \tag{12}$$

Определение конституентной массы s -кварка проведем аналогично. Использование экспериментального значения константы распада $f_{K^\pm}^{(\text{экк})}$ K^\pm -мезона с массой $M_{K^\pm}^{(\text{экк})}$ выражений (5), (7) и (8) приводит к

$$\begin{cases} 1/2(\hat{m}_u + \hat{m}_s) = (47,58 \pm 5,74) \text{ МэВ}, \\ f_P(m_u, m_s, \beta_{u\bar{s}}^P) = f_{K^\pm}^{(\text{экк})}, \\ (\hat{m}_u + \hat{m}_s)g_P(m_u, m_s, \beta_{u\bar{s}}^P) = f_{K^\pm}^{(\text{экк})} \left(M_{K^\pm}^{(\text{экк})} \right)^2, \end{cases} \tag{13}$$

откуда

$$m_s = (416,95 \pm 6,12) \text{ МэВ}, \quad \beta_{us}^P = (375,54 \pm 19,66) \text{ МэВ}. \tag{14}$$

Полученные в данном разделе значения конституентных масс кварков и параметров волновых функций будут использованы ниже для вычисления наблюдаемых распадов псевдоскалярных мезонов.

3. Схемы смешивания псевдоскалярных мезонов. Известно [5], что векторы нейтральных псевдоскалярных мезонов образуются из линейных комбинаций кварковых $|u\bar{u}\rangle$, $|d\bar{d}\rangle$ и $|s\bar{s}\rangle$ состояний. Рассмотрим схемы смешивания, необходимые для расчетов форм-факторов двухфотонных распадов псевдоскалярных мезонов в развитом формализме.

Ниже для описания схемы смешивания будем использовать линейные комбинации кварковых состояний

$$\begin{cases} \psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} |u\bar{u} - d\bar{d}\rangle, \\ \psi_q = \frac{1}{\sqrt{2}} |u\bar{u} + d\bar{d}\rangle, \\ \psi_s = |s\bar{s}\rangle. \end{cases} \tag{15}$$

Физические состояния π^0 -, η - и η' -мезонов в базисе (15) могут быть записаны в виде

$$\begin{pmatrix} \pi^0 \\ \eta \\ \eta' \end{pmatrix} = U(\phi_P, \phi_{\pi^0\eta}, \phi_{\pi^0\eta'}) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_q \\ \psi_s \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где $U(\phi_P, \phi_{\pi^0\eta}, \phi_{\pi^0\eta'})$ – матрица смешивания. Поскольку смешивание (π^0 - η)- и (π^0 - η')-мезонов достаточно мало, наивная схема смешивания для нейтральных псевдоскалярных мезонов из (15) и (16) может быть записана в виде

$$\begin{cases} |\pi^0\rangle = \psi_1, \\ |\eta\rangle = \cos\phi_P \psi_q - \sin\phi_P \psi_s, \\ |\eta'\rangle = \cos\phi_P \psi_q + \sin\phi_P \psi_s. \end{cases} \tag{17}$$

Однако из анализа экспериментальных данных радиационных распадов $V(P) \rightarrow V(P)\gamma$ было показано [11], что использование схемы с одним углом смешивания (17) приводит к расхождению с теоретическими расчетами. В [9, 10] предложена схема смешивания η/η' -мезонов с учетом глюонной компоненты $|G\rangle$:

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \\ G \end{pmatrix} = U(\phi_P, \alpha_G, \phi_G) \begin{pmatrix} \Psi_q \\ \Psi_s \\ \Psi_G \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где $U(\phi_P, \alpha_G, \phi_G)$ – матрица смешивания

$$U(\phi_P, \alpha_G, \phi_G) = \begin{pmatrix} X_\eta & Y_\eta & Z_\eta \\ X_{\eta'} & Y_{\eta'} & Z_{\eta'} \\ X_G & Y_G & Z_G \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Элементы матрицы вращения определяются через углы ϕ_P , ϕ_G и α_G следующим образом:

$$\begin{aligned} X_\eta &= \cos \phi_P \cos \alpha_G, & Y_\eta &= -\sin \phi_P \cos \alpha_G, & Z_\eta &= -\sin \alpha_G, \\ X_{\eta'} &= \cos \phi_P \sin \alpha_G \sin \phi_G + \sin \phi_P \cos \alpha_G, & Y_{\eta'} &= \cos \phi_P \cos \alpha_G - \sin \phi_P \sin \alpha_G \sin \phi_G, \\ Z_{\eta'} &= \cos \alpha_G \sin \phi_G. \end{aligned} \quad (20)$$

В [31] авторами проведен анализ радиационных $V \rightarrow (P)\gamma$ и лептонных распадов $V \rightarrow \ell^- \ell^+$ векторных мезонов в предложенной модели с использованием схемы смешивания (18). В настоящей работе выполнен повторный анализ с учетом изменения экспериментальных данных по радиационным распадам псевдоскалярных и векторных мезонов. Расчет приводит к следующим значениям:

$$\begin{aligned} \beta_{ss}^V &= (336,56 \pm 1,38) \text{ МэВ}, & \beta_{ud}^V &= (310,95 \pm 2,14) \text{ МэВ}, \\ \beta_{us}^V &= (313,62 \pm 2,42) \text{ МэВ}, & \beta_{uu}^P &= (274,57 \pm 19,66) \text{ МэВ}, \\ \beta_{dd}^P &= (266,83 \pm 19,66) \text{ МэВ}, & \beta_{ss}^P &= (496,71 \pm 19,66) \text{ МэВ}, \end{aligned} \quad (21)$$

совместно со значениями магнитных моментов кварков, которые представлены в табл. 1. Отметим, что неопределенности значений достигают порядка 30 %, поэтому дальнейшие вычисления проведем без их учета. Также табл. 1 содержит информацию по значениям магнитных моментов кварков, которые получены в других моделях. Все значения, полученные в других моделях, были определены выражением (4).

Таблица 1. Сравнение аномальных магнитных моментов кварков

Table 1. Quarks anomalous magnetic moments comparison

Аномальные магнитные моменты кварков Quark anomalous magnetic moments	[25]	[26]	Эта работа This work
$ \kappa_u $	0,096	0,0435	0,1236
$ \kappa_d $	0,017	0,177	0,0883
$ \kappa_s $	–	–	0,1984

Анализ данных табл. 1 показывает, что значения магнитных моментов кварков имеют достаточно большой разброс в различных моделях, поэтому дальнейшее исследование структуры конститuentных кварков является важной и актуальной задачей. Также найдено, что значения углов $\phi_P = (46,3^\circ \pm 2,1^\circ)$, $\alpha_G = (10,64^\circ \pm 3,4^\circ)$ и $\phi_G = (-29,1^\circ \pm 3,4^\circ)$ коррелируют со значениями, полученными в [11] и удовлетворительно описывают имеющиеся экспериментальные данные.

Полученные в данном разделе параметры модели будут использованы для численных расчетов форм-факторов двухфотонных распадов π^0 -, η - и η' -мезонов в точечной форме динамики.

4. Форм-фактор распада $P^0 \rightarrow \gamma\gamma^*$ в точечной форме динамики. Параметризация матричного элемента распада нейтрального псевдоскалярного мезона $P^0 \rightarrow \gamma\gamma^*$ дается выражением [15]

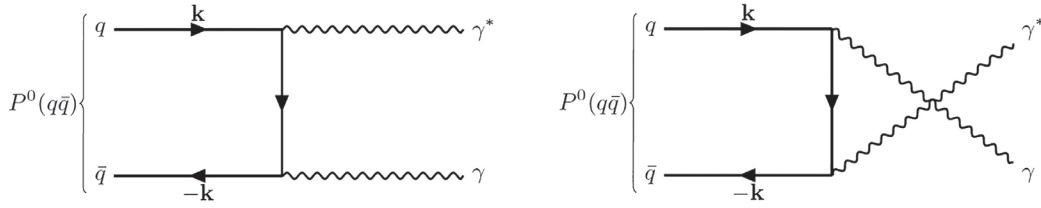

 Рис. 1. Механизм распада $P^0(q\bar{q}) \rightarrow \gamma\gamma^*$ в предложенной модели

 Fig. 1. The $P^0(q\bar{q}) \rightarrow \gamma\gamma^*$ decay mechanism in the proposed model

$$\langle \gamma\gamma^* | \hat{J}^\mu | \mathbf{Q}, M_P \rangle = F_{P^0\gamma}(t) \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} Q_\nu \varepsilon_\rho^*(\lambda^{\text{real}}) q_\sigma^{\text{virt}}}{\sqrt{2} \omega_{M_P}(\mathbf{Q})}, \quad (22)$$

где q^{real} – 4-импульс реального $(q^{\text{real}})^2 = 0$ фотона с соответствующим вектором поляризации $\varepsilon(\lambda^{\text{real}})$, а q^{virt} – 4-импульс виртуального $(q^{\text{virt}})^2 = t$ γ^* -кванта, \sqrt{t} – переданный лептонной паре импульс. Константа $g_{P^0\gamma}$ распада $P^0 \rightarrow \gamma\gamma$ определяется значением форм-фактора $F_{P^0\gamma}(t)$ при $t = 0$.

Поскольку в точечной форме ПикМ 4-скорости с взаимодействием и без совпадают, выражение (22) в терминах $V^\mu = Q^\mu/M_0$ можно представить в виде

$$\langle \gamma\gamma^* | \hat{J}^\mu | \mathbf{Q}, M_P \rangle = F_{P^0\gamma}(t) \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \frac{K^\mu(\lambda^{\text{real}})}{\sqrt{2} V_0}, \quad (23)$$

где

$$K^\mu(\lambda^{\text{real}}) = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} V_\nu \varepsilon_\rho^*(\lambda^{\text{real}}) q_\sigma^{\text{virt}} \sqrt{M_0}. \quad (24)$$

Распад нейтрального псевдоскалярного мезона в пару фотонов в предложенном подходе обусловлен аннигиляцией кварков, входящих в псевдоскалярный мезон $P^0(q\bar{q})$. Процесс кварк-антикварковой аннигиляции в пару фотонов описывается диаграммами, изображенными на рис. 1.

Использование схемы смешивания раздела 3 приводит к выражениям форм-факторов псевдоскалярных мезонов

$$F_{\pi^0\gamma}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{I}_{u\bar{u}}(t) - \tilde{I}_{d\bar{d}}(t)), \quad F_{\eta\gamma}(t) = \frac{X_\eta}{\sqrt{2}} (\tilde{I}_{u\bar{u}}(t) + \tilde{I}_{d\bar{d}}(t)) + Y_\eta \tilde{I}_{s\bar{s}}(t), \quad (25)$$

$$F_{\eta'\gamma}(t) = \frac{X_{\eta'}}{\sqrt{2}} (\tilde{I}_{u\bar{u}}(t) + \tilde{I}_{d\bar{d}}(t)) + Y_{\eta'} \tilde{I}_{s\bar{s}}(t),$$

где функции $\tilde{I}_{q\bar{q}}(t)$ в точечной форме ПикМ определяются из уравнения

$$\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \frac{K^\mu(\lambda^{\text{real}})}{\sqrt{2} V_0} I_{qq}(t) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \int d\mathbf{k} \Omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \end{pmatrix} (\theta_{\mathbf{k}}, \phi_{\mathbf{k}}) \Phi(\mathbf{k}, \beta_{q\bar{q}}^P) \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{V_0}} (M_{\lambda_1, \lambda_2}^\mu(I) + M_{\lambda_1, \lambda_2}^\mu(II)). \quad (26)$$

Матричные элементы процесса $q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma^*$ в (26) записываются как

$$M^\mu(\lambda_1, \lambda_2)(I) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\bar{v}_{\lambda_2}(-\mathbf{k}, m_{\bar{q}})}{\sqrt{2\omega_{m_{\bar{q}}}(\mathbf{k})}} \Gamma_{e_{\bar{q}}}^\mu(-q^{\text{real}}) \frac{\hat{k} - \hat{q}^{\text{real}} + m_q}{(k - q^{\text{real}})^2 - m_q^2} (\Gamma_{e_q}(-q^{\text{virt}}) \cdot \varepsilon^*(\lambda^{\text{real}})) \frac{u_{\lambda_1}(\mathbf{k}, m_q)}{\sqrt{2\omega_{m_q}(\mathbf{k})}}, \quad (27)$$

$$M^\mu(\lambda_1, \lambda_2)(II) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\bar{v}_{\lambda_2}(-\mathbf{k}, m_{\bar{q}})}{\sqrt{2\omega_{m_{\bar{q}}}(\mathbf{k})}} (\Gamma_{e_q}(-q^{\text{virt}}) \cdot \varepsilon^*(\lambda^{\text{real}})) \frac{\hat{k} - \hat{q}^{\text{real}} + m_q}{(k - q^{\text{real}})^2 - m_q^2} \Gamma_{e_{\bar{q}}}^\mu(-q^{\text{real}}) \frac{u_{\lambda_1}(\mathbf{k}, m_q)}{\sqrt{2\omega_{m_q}(\mathbf{k})}}.$$

В выражениях (27) вершина электромагнитного взаимодействия кварков с фотоном $\Gamma_{e\bar{q}}^\mu(q)$ определена с учетом возможной структуры кварка калибровочно-инвариантным образом

$$\Gamma_{e\bar{q}}^\mu(q) = e_q \left(F_1^q(q^2) \gamma^\mu + \kappa_q F_2^q(q^2) \frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m} q_\nu \right), \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu), \quad (28)$$

где $F_1^q(q^2)$, $F_2^q(q^2)$ – дираковские форм-факторы кварков. Знак минус в аргументе функции (27) $\Gamma_{e\bar{q}}$ обусловлен тем, что фотоны в реакции испускаются, а не поглощаются. Отметим также, что для упрощения дальнейшего анализа из форм-факторов вершины (28) в явном виде выделены электрический заряд e_q и аномальный магнитный момент кварка κ_q . В этом случае магнитный момент кварка μ_q определяется выражением (4).

С учетом выражений (26) и (27) приходим к интегральному представлению функции $I_{q\bar{q}}(t)$ в рамках релятивистской модели, основанной на точечной форме ПиКМ:

$$\begin{aligned} I_{q\bar{q}}(t) = & \frac{\sqrt{2}}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \int d\mathbf{k} \Omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \end{pmatrix} (\theta_k, \phi_k) \Phi(\mathbf{k}, \beta_{q\bar{q}}^P) (K(\lambda^{\text{real}}) K^*(\lambda^{\text{real}}))^{-1} \times \\ & \times \left(\frac{\bar{v}_{\lambda_2}(-\mathbf{k}, m_{\bar{q}})}{\sqrt{2\omega_{m_{\bar{q}}}(\mathbf{k})}} (\Gamma_{e\bar{q}} \epsilon^*(\lambda^{\text{real}})) \frac{\hat{k} - \hat{q}^{\text{virt}} + m_q}{(k - q^{\text{virt}})^2 - m_q^2} (\Gamma_{e\bar{q}} K^*(\lambda^{\text{real}})) \frac{u_{\lambda_1}(\mathbf{k}, m_q)}{\sqrt{2\omega_{m_q}(\mathbf{k})}} + \right. \\ & \left. + \frac{\bar{v}_{\lambda_2}(-\mathbf{k}, m_{\bar{q}})}{\sqrt{2\omega_{m_{\bar{q}}}(\mathbf{k})}} (\Gamma_{e\bar{q}} K^*(\lambda^{\text{real}})) \frac{\hat{k} - \hat{q}^{\text{real}} + m_q}{(k - q^{\text{real}})^2 - m_q^2} (\Gamma_{e\bar{q}} \epsilon^*(\lambda^{\text{real}})) \frac{u_{\lambda_1}(\mathbf{k}, m_q)}{\sqrt{2\omega_{m_q}(\mathbf{k})}} \right); \quad (29) \end{aligned}$$

в (29) использованы обозначения

$$|\mathbf{q}^{\text{virt}}| = |\mathbf{q}^{\text{real}}| = \frac{M_0^2 - t}{2M_0}, \quad K^\mu(\lambda^{\text{real}}) = \frac{M_0^2 - t}{2\sqrt{2}M_0} \{0, i\lambda^{\text{real}}, 1, 0\}. \quad (30)$$

Расчет спинорной части (29) приводит к

$$\tilde{I}_{q\bar{q}}(t) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \int_0^\infty dk k^2 \Phi(\mathbf{k}, \beta_{q\bar{q}}^P) e_q^2 \left(\tilde{f}_1(\mathbf{k}, m_q, t) + \frac{\kappa_q}{2m_q} \tilde{f}_2(\mathbf{k}, m_q, t) + \frac{\kappa_q^2}{4m_q^2} \tilde{f}_3(\mathbf{k}, m_q, t) \right) \quad (31)$$

с вспомогательными функциями

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(\mathbf{k}, m, t) &= \frac{2mF_1^q(t)F_1^q(0)}{k \omega_m^{1/2}(\mathbf{k}) (4\omega_m^2(\mathbf{k}) - t)} \log \left(\frac{\omega_m(\mathbf{k}) + k}{\omega_m(\mathbf{k}) - k} \right), \\ \tilde{f}_2(\mathbf{k}, m, t) &= \frac{2(F_1^q(t)F_2^q(0) + F_1^q(0)F_2^q(t))}{k \omega_m^{1/2}(\mathbf{k}) (4\omega_m^2(\mathbf{k}) - t)} \left(2k \omega_m(\mathbf{k}) + m^2 \log \left(\frac{\omega_m(\mathbf{k}) + k}{\omega_m(\mathbf{k}) - k} \right) \right), \\ \tilde{f}_3(\mathbf{k}, m, t) &= \frac{2m_q (4\omega_m^2(\mathbf{k}) + t)}{\omega^{3/2}(\mathbf{k}) (4\omega_m^2(\mathbf{k}) - t)} F_2^q(t) F_2^q(0). \end{aligned} \quad (32)$$

Из (31) получаем выражение, которое позволяет провести вычисления изучаемых констант распадов $g_{P^0\gamma}$

$$I_{q\bar{q}} = \tilde{I}_{q\bar{q}}(0) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \int_0^\infty dk k^2 \Phi(\mathbf{k}, \beta_{q\bar{q}}^P) e_q^2 \left(f_1(\mathbf{k}, m_q) + \frac{\kappa_q}{2m_q} f_2(\mathbf{k}, m_q) + \frac{\kappa_q^2}{4m_q^2} f_3(\mathbf{k}, m_q) \right), \quad (33)$$

где $f_i(\mathbf{k}, m) = \tilde{f}_i(\mathbf{k}, m, t=0)$, $i=1, 2, 3$.

5. Численные расчеты и обсуждение результатов. В разделе вычислим константы двухфотонных распадов π^0 -, η - и η' -мезонов в точной форме ПИКМ. Оценка константы распада $g_{P^0\gamma}$ может быть проведена из экспериментальных значений для ширины распада псевдоскалярного мезона:

$$\Gamma(P^0 \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{\pi}{4} \alpha^2 |g_{P^0\gamma}|^2 M_{P^0}^3. \quad (34)$$

В предлагаемом подходе константы распадов псевдоскалярных мезонов определяются значением форм-фактора $F_{P^0\gamma}(t)$ при $t = 0$. Из (18) и (31) получаем

$$g_{\pi^0\gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}} (I_{u\bar{u}} - I_{d\bar{d}}), \quad g_{\eta\gamma} = \frac{X_\eta}{\sqrt{2}} (I_{u\bar{u}} + I_{d\bar{d}}) + Y_\eta I_{s\bar{s}}, \quad g_{\eta'\gamma} = \frac{X_{\eta'}}{\sqrt{2}} (I_{u\bar{u}} + I_{d\bar{d}}) + Y_{\eta'} I_{s\bar{s}}. \quad (35)$$

Численные расчеты проведем с и без аномальных магнитных моментов кварков из табл. 1. В табл. 2 представлены результаты вычислений в предложенном подходе с $F_1^q(0) = F_2^q(0) = 1$.

Таблица 2. Сравнение модельных расчетов с экспериментальными данными

Table 2. The comparison of the model calculation with the experimental data

	Расчет без κ_q Calculation without κ_q terms	Расчет с κ_q Calculation with κ_q terms	PDG [5] PDG [5]
$ g_{\pi^0\gamma} , \text{ГэВ}^{-1}$	$0,259 \pm 0,005$	$0,375 \pm 0,007$	$0,274 \pm 0,002$
$ g_{\eta\gamma} , \text{ГэВ}^{-1}$	$0,249 \pm 0,005$	$0,331 \pm 0,010$	$0,274 \pm 0,005$
$ g_{\eta'\gamma} , \text{ГэВ}^{-1}$	$0,289 \pm 0,005$	$0,410 \pm 0,045$	$0,340 \pm 0,050$

Анализ данных табл. 2 показывает, что константы двухфотонных распадов π^0 -, η - и η' -мезонов чувствительны к значениям магнитных моментов μ_q . Ниже изложим процедуру, которая позволяет приблизить расчеты предложенной модели к экспериментальным данным.

Отметим, что виртуальные кварки на диаграммах рис. 1 находятся вне массовой оболочки. Их пропагаторы, вообще говоря, не будут пропагаторами свободных кварков, поэтому вершинные функции фотон-кварков (28) должны учитывать этот фактор виртуальности. Это можно сделать путем модификации общепринятых форм-факторов, применяемых для фермионов на массовой оболочке. Для изучаемых распадов π^0 -, η - и η' -мезонов изменение величины t ограничено массой мезонов и относится к области малых переданных импульсов. Исходя из указанного, учет виртуальности кварка проведем умножением форм-факторов $F_i^q(t)$, использованных в [24] для описания протонных характеристик, на параметр b_q :

$$F_1^q(t) = \frac{b_q}{1 + \langle r_q^2 \rangle \frac{t}{6}}, \quad F_2^q(t) = \frac{b_q}{\left(1 + \langle r_q^2 \rangle \frac{t}{12}\right)^2}. \quad (36)$$

В (36) среднеквадратичный радиус кварка дается выражением

$$\langle r_q^2 \rangle = \frac{a}{m_q^2}, \quad a = 0,23, \quad (37)$$

а параметр b_q определим из требования соответствия модельных расчетов с экспериментальными данными по константам распадов π^0 -, η - и η' -мезонов. Результаты проведенных вычислений представлены в табл. 3.

Таблица 3. Значения параметра b_q для различных ароматов легких кварков

Table 3. Values of the parameter b_q for various flavors of the light quarks

q	u	d	s
b_q	0,89	0,99	0,93

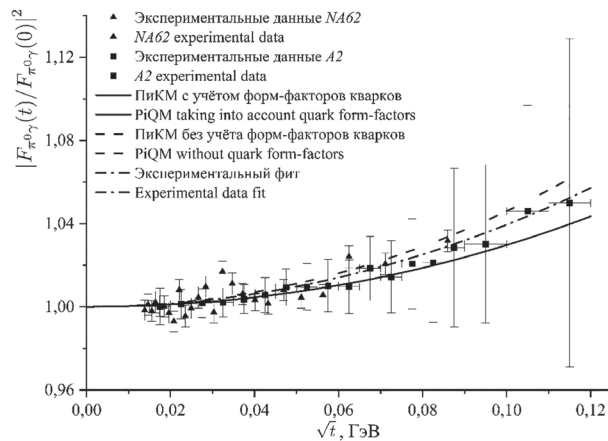


Рис. 2. Сравнение расчетов модели с данными коллаборации A2 и NA62 [1, 2] с и без учета (36)

Fig. 2. The comparison of the model calculation with the A2 and NA62 collaborations data [1, 2] with and without (36)

На основе полученных параметров и значений аномальных магнитных моментов кварков проведем изучение форм-факторов распада $P^0(q\bar{q}) \rightarrow \gamma\gamma^*$ в области малых переданных импульсов виртуального γ^* -кванта. Отметим, расчеты без использования форм-факторов кварков были выполнены в динамике светового фронта [15]. В нашем подходе рассмотрим влияние кварковых форм-факторов, входящих в вершину взаимодействия (28), на согласование модельных расчетов с современными экспериментальными данными.

Для оценки значимости форм-факторов кварков на соответствие модельных расчетов с экспериментальными данными используем величину

$$\chi_{d.o.f}^2 = \sum_i \left(\frac{\left(F_{P^0\gamma}^{(экс)}(t_i) \right)^2 - \left(F_{P^0\gamma}(t_i) \right)^2}{\left(\delta F_{P^0\gamma}^{(экс)}(t_i) \right)^2} \right)^2, \quad (38)$$

где $\delta F_{P^0\gamma}^{(экс)}(t_i)$ – экспериментальная неопределенность форм-фактора мезона $F_{P^0\gamma}^{(экс)}(t_i)$ при фиксированном значении квадрата переданного импульса t_i . Суммирование проводится по всем имеющимся экспериментальным значениям форм-факторов двухфотонных распадов π^0 -, η - и η' -мезонов, полученных коллаборациями A2, NA62 и BESIII.

Вычисление функции (38) без учета форм-факторов приводит к значению

$$\chi_{d.o.f}^2 = 40,18, \quad (39)$$

в то время как использование (36) и (37) приводит к значительно меньшей величине

$$\chi_{d.o.f}^2 = 18,20. \quad (40)$$

Из (39) и (40) заключаем, что учет кварковых форм-факторов приводит к удовлетворительно-му описанию современных экспериментальных данных.

По результатам расчетов получаем следующее поведение форм-факторов π^0 -, η - и η' -мезонов в сравнении с экспериментальными данными (рис. 2–4).

Анализ рис. 2–4 показывает, что в области малых переданных импульсов предложенная релятивистская кварковая модель, основанная на точечной форме ПиКМ, удовлетворительно описывает данные коллабораций A2, NA62 и BESIII в пределах экспериментальной ошибки. Наибольшее отклонение от экспериментальных данных в предложенном подходе наблюдается для форм-фактора η -мезона.

Заключение. Работа посвящена изучению электромагнитных распадов легких π^0 -, η - и η' -мезонов в точечной форме ПиКМ. С использованием оригинальной методики расчета параметров модели определены значения конституентных масс кварков и параметров волновых функций с последующим вычислением констант распадов нейтральных псевдоскалярных мезонов. Показано,

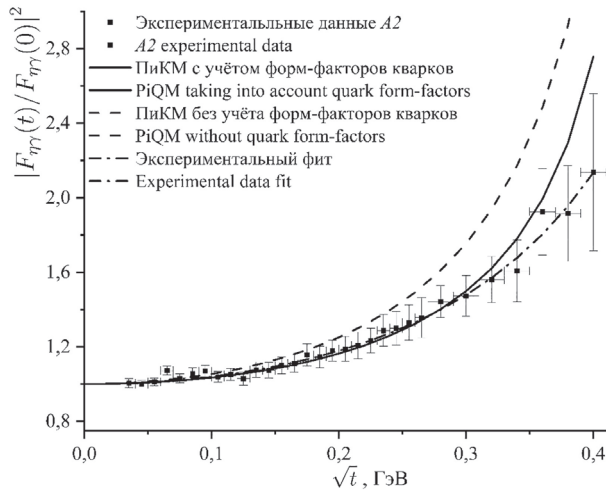


Рис. 3. Сравнение расчетов модели с данными коллаборации A2 [3] с учетом (36)

Fig. 3. The comparison of the model calculation with the A2 collaboration data [3] taking into account (36)

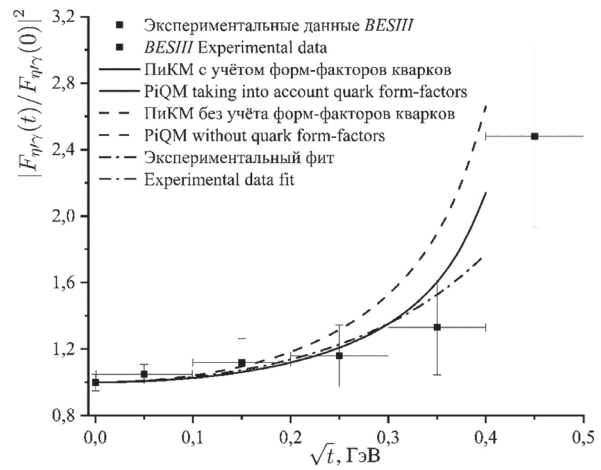


Рис. 4. Сравнение расчетов модели с данными коллаборации BESIII [4] с учетом (36)

Fig. 4. The comparison of the model calculation with the BESIII collaboration data [4] taking into account (36)

что учет структуры конститuentных кварков приводит к совпадающим с экспериментальными данными значениям констант $g_{\pi^0\gamma}$, $g_{\eta\gamma}$ и $g_{\eta'\gamma}$. В области малых переданных импульсов предложенная релятивистская кварковая модель, основанная на точечной форме ПиКМ, удовлетворительно описывает современные экспериментальные данные по форм-факторам двухфотонных распадов псевдоскалярных π^0 -, η - и η' -мезонов. В заключение отметим, что предложенная модель корректно описывает форм-факторы радиационных распадов $V(P) \rightarrow V(P)\gamma$ [31], электромагнитные характеристики ρ -мезона [29], а также электромагнитные характеристики мезонов легкого сектора [32, 33]. Методика расчета может быть использована для расчетов аксиального и векторного форм-фактора псевдоскалярного мезона распада $P^\pm(q\bar{Q}) \rightarrow \ell^\pm \nu_{\ell^\pm} \gamma$.

Список использованных источников

1. Measurement of the Dalitz decay $\pi^0 \rightarrow e^+e^-\gamma$ at the Mainz Microtron / P. Adlarson [et al.]; (A2 collaboration at MAMI) // Phys. Rev. C. – 2017. – Vol. 95, № 2. – P. 025202. <https://doi.org/10.1103/physrevc.95.025202>
2. Measurement of the π^0 electromagnetic transition form factor slope / C. Lazzeroni [et al.]; (NA62 collaboration) // Phys. Lett. B. – 2017. – Vol. 768. – P. 38–45. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2017.02.042>
3. New determination of the η transition form factor in the Dalitz decay $\eta \rightarrow e^+e^-\gamma$ with the Crystal Ball/TAPS detectors at the Mainz Microtron / P. Aguilar-Bartolome [et al.]; (A2 collaboration at MAMI) // Phys. Rev. C. – 2014. – Vol. 89, № 4. – P. 044608. <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.89.044608>
4. Observation of the Dalitz decay $\eta' \rightarrow e^+e^-\gamma$ / M. Ablikim [et al.]; (BESIII collaboration) // Phys. Rev. D. – 2015. – Vol. 92, № 1. – P. 012001. <https://doi.org/10.1103/physrevd.92.012001>
5. Review of Particle Physics / R. L. Walkman [et al.] // Prog. Theor. Exp. Phys. – 2022. – Vol. 2022, № 8. <https://doi.org/10.1093/ptep/ptac097>
6. Feldman, T. Quark structure of pseudoscalar mesons / T. Feldman // Int. J. Mod. Phys. A. – 2000. – Vol. 15, № 02. – P. 159–207. <https://doi.org/10.1142/s0217751x00000082>
7. Escribano, R. The η transition form factor from space- and time-like experimental data / R. Escribano, P. Masjuan, P. Sanchez-Puertas // Eur. Phys. J. C. – 2015. – Vol. 75. – P. 414. <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3642-z>
8. Radiative decays, nonet symmetry, and $SU(3)$ breaking / M. Benayoun [et al.] // Phys. Rev. D. – 1999. – Vol. 59, № 11. – P. 114027. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.59.114027>
9. Thomas, C. E. Composition of the pseudoscalar η and η' mesons / C. E. Thomas // JHEP. – 2007. – Vol. 10. – P. 026. <https://doi.org/10.1088/1126-6708/2007/10/026>
10. Escribano, R. On the gluon content of the η and η' mesons / R. Escribano, J. Nadal // JHEP. – 2007. – Vol. 05. – P. 006. <https://doi.org/10.1088/1126-6708/2007/05/006>
11. Measurement of the pseudoscalar mixing angle and η' gluonium content with KLOE detector / F. Ambrosino [et al.] // Phys. Lett. B. – 2007. – Vol. 648, № 4. – P. 267–273. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2007.03.032>
12. Bartelski, J. Radiative decays of mesons and the η - η' - g mixing / J. Bartelski, S. Tatur // Phys. Lett. B. – 1992. – Vol. 289, № 3–4. – P. 429–434. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(92\)91244-4](https://doi.org/10.1016/0370-2693(92)91244-4)

13. Keister, B. D. Relativistic Hamiltonian dynamics in nuclear and particle physics / B. D. Keister, W. N. Polyzou // *Adv. Nucl. Phys.* – 1991. – Vol. 20. – P. 225–479.
14. Dirac, P. A. M. Forms of Relativistic Dynamics / P. A. M. Dirac // *Rev. Mod. Phys.* – 1949. – Vol. 21, № 3. – P. 392–399. <https://doi.org/10.1103/revmodphys.21.392>
15. Choi, H.-M. Spacelike and timelike form factors for the $(\pi^0, \eta, \eta') \rightarrow \gamma^*$ transitions in the light-front quark model / H.-M. Choi, H.-Y. Ryu, Ch.-R. Ji // *Phys. Rev. D.* – 2017. – Vol. 96, № 5. – P. 056008. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.056008>
16. Jaus, W. Relativistic constituent quark model of electroweak properties of light mesons / W. Jaus // *Phys. Rev. D.* – 1991. – Vol. 44, № 9. – P. 2851–2859. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.44.2851>
17. Krutov, A. F. Electroweak properties of ρ -meson in the instant form of relativistic quantum mechanics / A. F. Krutov, R. G. Polezhaev, V. E. Troitsky // *EPJ Web Conf.* – 2017. – Vol. 138. – P. 02007. <https://doi.org/10.1051/epjconf/201713802007>
18. Krutov, A. F. Magnetic moment of the ρ meson in instant-form relativistic quantum mechanics / A. F. Krutov, R. G. Polezhaev, V. E. Troitsky // *Phys. Rev. D.* – 2018. – Vol. 97, № 3. – P. 033007. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.033007>
19. Point-form quantum field theory / E. P. Biernat [et al.] // *Ann. Phys.* – 2008. – Vol. 323, № 6. – P. 1361–1383. <https://doi.org/10.1016/j.aop.2007.09.004>
20. Biernat, E. P. Electromagnetic properties of few-body systems within a point-form approach [Electronic resource] / E. P. Biernat // *Arxiv [Preprint]*. – 2011. – Mode of access: <https://arxiv.org/abs/1110.3180>
21. Godfrey, S. Mesons in a relativized quark model with chromodynamics / S. Godfrey, N. Isgur // *Phys. Rev. D.* – 1985. – Vol. 32, № 1. – P. 189–231. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.32.189>
22. Celmaster, W. Potential model of meson masses / W. Celmaster, H. Georgi, M. Georgi. // *Phys. Rev. D.* – 1978. – Vol. 17, № 3. – P. 879–885. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.17.879>
23. Charge form-factor of π and K mesons / F. Cardarelli [et al.] // *Phys. Rev. D.* – 1996. – Vol. 53, № 11. – P. 6682–6685. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.53.6682>
24. Jaus, W. Consistent treatment of spin-1 mesons in the light-front quark model / W. Jaus // *Phys. Rev. D.* – 2003. – Vol. 67, № 9. – P. 094010. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.67.094010>
25. Petronzio, R. Possible evidence of extended objects inside the proton / R. Petronzio, S. Simula, G. Ricco // *Phys. Rev. D.* – 2003. – Vol. 67, № 9. – P. 094994. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.67.094004>
26. Fayazbakhsh, Sh. Anomalous magnetic moment of hot quarks, inverse magnetic catalysis, and reentrance of the chiral symmetry broken phase / Sh. Fayazbakhsh, N. Sadooghi // *Phys. Rev. D.* – 2014. – Vol. 90, № 10. – P. 105030. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.90.105030>
27. Mini review of Poincaré invariant quantum theory / W. N. Polyzou [et al.] // *Few-Body Syst.* – 2011. – Vol. 49. – P. 129–147. <https://doi.org/10.1007/s00601-010-0149-x>
28. Haurysh, V. Yu. ρ -Meson form-factors in point form of Poincaré-invariant quantum mechanics / V. Yu. Haurysh, V. V. Andreev // *Few-Body Syst.* – 2021. – Vol. 62. – Art. ID 29. <https://doi.org/10.1007/s00601-021-01610-7>
29. Haurysh, V. Yu. Constituent quark masses in Poincaré-invariant quantum mechanics / V. Yu. Haurysh, V. V. Andreev // *J. Phys.: Conf. Ser.* – 2017. – Vol. 938. – P. 012030. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/938/1/012030>
30. Haurysh, V. Yu. Radiative decays of light vector mesons in Poincaré invariant quantum mechanics / V. Yu. Haurysh, V. V. Andreev // *J. Phys.: Conf. Ser.* – 2016. – Vol. 678. – P. 012041. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/678/1/012041>
31. Haurysh, V. Yu. Electroweak decays of unflavored mesons in Poincaré covariant quark model / V. Yu. Haurysh, V. V. Andreev // *Turk. J. Phys.* – 2019. – Vol. 43, № 2. – P. 167–177. <https://doi.org/10.3906/fiz-1810-24>
32. Haurysh, V. Yu. Poincaré-covariant quark model of electroweak light mesons decays / V. Yu. Haurysh, V. V. Andreev // *EPJ Web Conf.* – 2019. – Vol. 204. – P. 08006. <https://doi.org/10.1051/epjconf/201920408006>

References

1. Adlarson P., Afzal F., Aguar-Bartolomé P., Ahmed Z., Akondi C. S., Annand J. R. M., Arends H. J. [et al.]; (A2 collaboration at MAMI). Measurement of the Dalitz decay $\pi^0 \rightarrow e^+ e^- \gamma$ at the Mainz Microtron. *Physical Review C*, 2017, vol. 95, no. 2, pp. 025202. <https://doi.org/10.1103/physrevc.95.025202>
2. Lazzeroni C., Lurkin N., Romano A., Blazek T., Koval M., Ceccucci A., Danielsson H. [et al.]; (NA62 collaboration). Measurement of the π^0 electromagnetic transition form factor slope. *Physical Letters B*, 2017, vol. 768, pp. 025202. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2017.02.042>
3. Aguar-Bartolomé P. J. R., Annand M., Arends H. J., Bantawa K., Beck R., Bekrenev V., Berghäuser H. [et al.]; (A2 collaboration at MAMI). New determination of the η transition form factor in the Dalitz decay $\eta \rightarrow e^+ e^- \gamma$ with the Crystal Ball/TAPS detectors at the Mainz Microtron. *Physical Review C*, 2014, vol. 89, no. 4, pp. 044608. <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.89.044608>
4. Ablikim M., Achasov M. N., Ai X. C., Albayrak O., Albrecht M., Ambrose D. J., Amoroso A. [et al.]; (BESIII collaboration). Observation of the Dalitz decay $\eta' \rightarrow e^+ e^- \gamma$. *Physical Review D*, 2015, vol. 92, no. 1, pp. 012001. <https://doi.org/10.1103/physrevd.92.012001>
5. Workman R. L., Burkert V. D., Crede V., Klempt E., Thoma U., Tiator L. [et al.]. Review of Particle Physics. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2022, vol. 2022, no. 8. <https://doi.org/10.1093/ptep/ptac097>
6. Feldman T. Quark structure of pseudoscalar mesons. *International Journal of Modern Physics A*, 2000, vol. 15, no. 02, pp. 159–207. <https://doi.org/10.1142/s0217751x00000082>
7. Escribano R., Masjuan P., Sanchez-Puertas P. The η transition form factor from space- and time-like experimental data. *The European Physical Journal C*, 2015, vol. 75, pp. 414. <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3642-z>

8. Benayoun M., DelBuono L., Eidelman S., Ivanchenko, V. N., O'Connell, H. B. Radiative decays, nonet symmetry, and $SU(3)$ breaking. *Physical Review D*, 1999, vol. 59, no. 11, pp. 114027. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.59.114027>
9. Thomas C. E. Composition of the pseudoscalar η and η' mesons. *Journal of High Energy Physics*, 2007, vol. 10, pp. 026. <https://doi.org/10.1088/1126-6708/2007/10/026>
10. Escrivano R., Nadal J. On the gluon content of the η and η' mesons. *Journal of High Energy Physics*, 2007, vol. 05, pp. 006. <https://doi.org/10.1088/1126-6708/2007/05/006>
11. Ambrosino F., Antonelli A., Antonelli M., Bacci C., Beltrame P., Bencivenni G., Bertolucci S. [et al.]. Measurement of the pseudoscalar mixing angle and η' gluonium content with KLOE detector. *Physical Letters B*, 2007, vol. 648, no. 4, pp. 267–273. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2007.03.032>
12. Bartelski J., Tatur S. Radiative decays of mesons and the η - η' - g mixing. *Physical Letters B*, 1992, vol. 289, no. 3–4, pp. 429–434. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(92\)91244-4](https://doi.org/10.1016/0370-2693(92)91244-4)
13. Keister B. D., Polyzou W. N. Relativistic Hamiltonian dynamics in nuclear and particle physics. *Advanced Nuclear Physics*, 1991, vol. 20, pp. 225–479.
14. Dirac P. A. M. Forms of Relativistic Dynamics. *Reviews of Modern Physics*, 1949, vol. 21, no. 3, pp. 392–399. <https://doi.org/10.1103/revmodphys.21.392>
15. Choi H.-M., Ryu H.-Y., Ch.-R. Ji. Spacelike and timelike form factors for the $(\pi^0, \eta, \eta') \rightarrow \gamma^*$ transitions in the light-front quark model. *Physical Review D*, 2017, vol. 96, no. 5, pp. 056008. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.056008>
16. Jaus W. Relativistic constituent-quark model of electroweak properties of light mesons. *Physical Review D*, 1991, vol. 44, no. 9, pp. 2851–2859. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.44.2851>
17. Krutov A. F., Polezhaev R. G., Troitsky V. E. Electroweak properties of ρ -meson in the instant form of relativistic quantum mechanics. *EPJ Web Conference*, 2017, vol. 138, pp. 02007. <https://doi.org/10.1051/epjconf/201713802007>
18. Krutov A. F., Polezhaev R. G., Troitsky V. E. Magnetic moment of the ρ meson in instant-form relativistic quantum mechanics. *Physical Review D*, 2018, vol. 97, no. 3, pp. 033007. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.033007>
19. Biernat E. P., Klink W. H., Schweiger W., Zelzer S. Point-form quantum field theory. *Annals of Physics*, 2008, vol. 323, no. 6, pp. 1361–1383. <https://doi.org/10.1016/j.aop.2007.09.004>
20. Biernat E. P. Electromagnetic properties of few-body systems within a point-form approach. *Arxiv [Preprint]*, 2011. Available at: <https://arxiv.org/abs/1110.3180>. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1110.3180>
21. Godfrey S., Isgur N. Mesons in a relativized quark model with chromodynamics. *Physical Review D*, 1985, vol. 32, no. 1, pp. 189–231. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.32.189>
22. Celmaster W., Georgi H., Georgi. M. Potential model of meson masses. *Physical Review D*, 1978, vol. 17, no. 3, pp. 879–885. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.17.879>
23. Cardarelli F., Grach I. L., Narodetsky I. M., Pace E., Salme G., Simula S. Charge form-factor of π and K mesons mesons. *Physical Review D*, 1996, vol. 53, no. 1, pp. 6682–6685. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.53.6682>
24. Jaus W. Consistent treatment of spin-1 mesons in the light-front quark model. *Physical Review D*, 2003, vol. 67, no. 9, pp. 094010. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.67.094010>
25. Petronzio R., Simula S., Ricco G. Possible evidence of extended objects inside the proton. *Physical Review D*, 2003, vol. 67, no. 9, pp. 094994. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.67.094004>
26. Fayazbakhsh Sh., Sadooghi N. Anomalous magnetic moment of hot quarks, inverse magnetic catalysis, and reentrance of the chiral symmetry broken phase. *Physical Review D*, 2003, vol. 90, no. 10, pp. 105030. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.90.105030>
27. Polyzou W. N., Elster C., Glöckle W. [et al.]. Mini review of Poincaré invariant quantum theory. *Few-Body Systems*, 2011, vol. 49, pp. 129–147. <https://doi.org/10.1007/s00601-010-0149-x>
28. Haurysh V. Yu., Andreev V. V. ρ -Meson form-factors in point form of Poincaré-invariant quantum mechanics. *Few-Body Systems*. 2021, vol. 62, art. ID 29. <https://doi.org/10.1007/s00601-021-01610-7>
29. Haurysh V. Yu., Andreev V. V. Constituent quark masses in Poincaré-invariant quantum mechanics. *Journal of Physics: Conference Series*, 2017, vol. 938, pp. 012030. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/938/1/012030>
30. Haurysh V. Yu., Andreev V. V. Radiative decays of light vector mesons in Poincaré invariant quantum mechanics. *Journal of Physics: Conference Series*, 2016, vol. 678, pp. 012041. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/678/1/012041>
31. Haurysh V. Yu., Andreev V. V. Electroweak decays of unflavored mesons in Poincaré covariant quark model. *Turkish Journal of Physics*, 2019, vol. 43, no. 2, pp. 167–177. <https://doi.org/10.3906/fiz-1810-24>
32. Haurysh V. Yu., Andreev V. V. Poincaré-covariant quark model of electroweak light mesons decays. *EPJ Web of Conferences*, 2019, vol. 204, pp. 08006. <https://doi.org/10.1051/epjconf/201920408006>

Інфармацыя аб аўтарах

Гаврыш Вадим Юрэвіч – кандыдат фізико-матэматычных навук, Гомельскі дзяржаўны тэхнічны ўніверсітэт імя П. О. Сухого (пр. Октябры, 48, 246746, Гомель, Рэспубліка Беларусь). E-mail: mez0n@inbox.ru. <https://orcid.org/0000-0003-0030-4971>

Андреев Виктор Васілевіч – доктар фізико-матэматычных навук, прафесар, Гомельскі дзяржаўны ўніверсітэт імя Ф. Скарыны (ул. Советская, 98, 246028, Гомель, Рэспубліка Беларусь). E-mail: vik.andreev@gsu.by. <https://orcid.org/0000-0003-3314-7175>

Information about the authors

Vadim Y. Haurysh – Ph. D. (Physics and Mathematics), Sukhoi State Technical University of Gomel (48, Oktyabrya Ave., 246746, Gomel, Republic of Belarus). E-mail: mez0n@inbox.ru. <https://orcid.org/0000-0003-0030-4971>

Viktor V. Andreev – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Francisk Skorina Gomel State University (98, Sovetskaya Str., 246028, Gomel, Republic of Belarus). E-mail: vik.andreev@gsu.by. <https://orcid.org/0000-0003-3314-7175>