УДК 621.396.67

ОПТИМАЛЬНЫЙ КОНСТРУКТИВНЫЙ СИНТЕЗ ИЗЛУЧАЮЩИХ СИСТЕМ, ВКЛЮЧАЯ РАДИОГОЛОГРАФИЧЕСКИЕ

В.Н. Мизгайлов

Рассмотрены оптимальные алгоритмы решения задач синтеза излучающих систем любой физической природы по заданной диаграмме направленности, когда операторы задачи построены экспериментально и на решения накладываются технические ограничения. Задачи практического синтеза рассмотрены как некорректные задачи математической физики. Даны оценки точности решения задачи синтеза.

1. Введение

Современные транспортные системы связи ориентируются на использование спутниковых радиоканалов. Спутниковые каналы требуют применения специальных мобильных антенн. Типы этих антенн и принципы их построения могут быть различными: это классические параболические антенны, активные фазированные антенные решетки и наиболее дешевые и практичные антенны, построенные на принципах радиоголографии [1, 2].

Для любого вида антенн в спутниковых системах связи требуется получение остронаправленных диаграмм с различными ограничениями на параметры. Желательно такие антенны проектировать с учетом этих требований. Это приводит к необходимости решения практических задач синтеза антенн с оптимальными характеристиками.

Задачи практического синтеза систем излучателей в неоднородном пространстве не имеют аналитического решения в общем случае, так как это связано с разрешимостью дифракционных задач. Однако известен подход [3], когда можно в операторной форме записать обобщенное уравнение задачи синтеза в виде

$$U\overline{I} = \overline{F}, \tag{1.1}$$

где U – прямой оператор задачи, устанавливающий соответствие между источниками излучения $\overline{I}$ и полем $\overline{F}$ в дальней зоне. Для однородного линейного пространства U – линейный оператор, а для неоднородных пространств U – линейный или нелинейный оператор, в зависимости от свойств этого пространства.

Вопросы разрешимости уравнения (1.1) в математике детально изучены для линейных операторов. В технике осложнения начинаются с того, что произвольно заданная функция требуемой диаграммы направленности (ДН) $\overline{F}_0$ может не принадлежать пространству реализуемых диаграмм. При практической реализации, когда необходимо учесть реальную электродинамическую ситуацию, прямой оператор задачи $\tilde{U}$ строится экспериментально. Любые измерения выполняются с погрешностью. Следовательно, в уравнении (1.1) знак равенства не является строгим. В этом случае решение уравнения (1.1) рассматривается как некорректная задача математической физики.Поэтому решение задачи синтеза всегда является приближенным [4].

При создании радиоголографических антенн экспериментально исследуется дифракционная структура электромагнитного поля на объекте, где будет размещена антенна. Таким образом, координаты размещения излучателей определяются по результатам измерений. Следовательно, прямой оператор задачи U известен приближенно. И все ранее высказанные утверждения о свойствах уравнения (1.1) остаются в силе и для радиоголографических антенн[5].

2. Постановка задачи

Задано требуемое поле излучения $\overline{F}_0(\overline{r}_0)$. Имеется система из $n \geq 2$ излучателей любой физической природы, образующих антенную решетку, размещенную в неоднородном пространстве. Ограничимся случаем, что физические свойства среды размещения излучателей изотропны и линейны, т.е. не зависят от напряженности полей излучателей. В этом случае оператор U в уравнении (1.1) линеен и представляет из себя комплекснозначную матрицу размерности n x M, где M – число отсчетов в измеренной ДН $\overline{F}_i$ реального i-го излучателя или заданной ДН. Обычно $M \geq 2ka+1$, где ka – число длин волн диапазона излучения, укладывающееся на периметре максимального круга радиуса a, охватывающего объект.

Очевидно, что в этом случае знак равенства в уравнении (1.1) справедлив с точностью до погрешностей измерения δU элементов оператора U.

Необходимо найти амплитуды и фазы сигналов на входных клеммах излучателей, которые реализуют наилучшее среднеквадратичное приближение Δ^2 к требуемому полю излучения $\overline{F}_0$:

$$\left\| \frac{\overline{F}_p}{\left\|\overline{F}_p\right\|} - \frac{\overline{F}_0}{\left\|\overline{F}_0\right\|} \right\|^2 = \Delta^2 . \tag{2.1}$$

3. Регуляризированные статистические методы решения задач синтеза систем излучателей

3.1. Положение и число излучателей системы задано. Под решением уравнения (1.1) задачи синтеза в рассматриваемой постановке, когда используется матричный приближенный и экспериментально построенный оператор $\tilde{U}$, будет пониматься математическое ожидание величины $M(\overline{I})$, взятое из некоторого статистического ансамбля решений с априорно заданной плотностью вероятности $\omega(\overline{I},\alpha)$ и параметром регуляризации α, отвечающим наложенным физически обоснованным ограничениям на характер решения.

Требуемую ДН $F_0(\overline{r}_0)$ зададим как комплекснозначную случайную функцию в m фиксированных направлениях, со среднеквадратичными некоррелированными ошибками σ, распределенными по нормальному закону. Тогда уравнение (1.1) заменяется его дискретным аналогом в каждом из m направлений

$$\sum_n \dot{U}_{mn} \dot{I}_n = \dot{F}_{0m} . \tag{3.1}$$

Полагаем, что матрица оператора $\tilde{U}$ состоит из амплитуд $\left|\dot{F}_{mn}\right|$ и фаз Ψ_{mn} индивидуальных ДН источников с независимыми среднеквадратичными ошибками по амплитуде σ_A и фазе σ_Ψ в любом из m направлений, распределенными по нормальному закону.

Статистическая регуляризация. Используя нормальный закон распределения погрешностей $\delta\overline{F}_0$ требуемой ДН, найдем условную вероятность того, что при данном n-мерном случайном векторе $\overline{I}$ в результате расчетов будет получен m-мерный вектор $\overline{F}$:

$$\omega(\overline{F}/\overline{I}) = \prod_m \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_m^2}} \exp\left\{ \frac{\left(F_{0m} - \sum_n U_{mn} I_n\right)^2}{2\sigma_m^2} \right\} . \tag{3.2}$$

Если ввести диагональную матрицу ошибок C с матричными элементами

$$C_{mn} = \frac{1}{\sigma_m^2}\delta_{mn}; \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad m = n \\ 0 & \text{при} \quad m \neq n \end{cases},$$

то соотношение (3.1) может быть в комплексной форме записано в виде

$$\omega(\overline{F}/\overline{I})=\frac{1}{\sigma_1\ldots\sigma_m\sqrt{(2\pi)^m}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\overline{I},A\overline{I})+\frac{1}{2}(\overline{a},\overline{I})\right\}, \tag{3.3}$$

где $\overline{a}=\tilde{U}*C\overline{F}_0$; $A=\tilde{U}*C\tilde{U}$; $\tilde{U}*$ – оператор, сопряженный прямому оператору задачи $\tilde{U}$.

Таким образом, случайные характеристики требуемой ДН $\overline{F}_0\,(\overline{r}_0)$ известны. Применяя байесову оценочную стратегию, можно ввести априорное распределение $\omega_\alpha(\overline{I})$ для неизвестного $\overline{I}$ и вычислить апостериорное распределение $\omega(\overline{I}/\overline{F},\alpha)$.

В выражении для $\omega(\overline{I}/\overline{F},\alpha)$ надо задать априорную функцию $\omega_\alpha(\overline{I})$, но так, чтобы она была удобна для расчетов и отражала характер выбранных ограничений на решение уравнения (3.3), вносила минимум информации, кроме той, которая содержится в ограничении. Такая функция имеет вид

$$\omega_\alpha(\overline{I})=C_\alpha\exp\left\{-\frac{\alpha}{2}(\overline{I},E\overline{I})\right\}, \tag{3.4}$$

где $C_\alpha=\sqrt{\dfrac{\alpha^n}{(2\pi)^m}}$ выбирается из условия нормировки, а величина $\alpha=\dfrac{N^2}{R^2}$, здесь N – число излучателей, R^2 – ограничение решения по норме. Все это дает окончательное выражение для

$$\omega(\overline{I}/\overline{F},\alpha)=\sqrt{\frac{\det(A+\alpha E)}{(2\pi)^n}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\overline{I},[A+\alpha E]\overline{I})+\frac{1}{2}(\overline{a},\overline{I})\right\}. \tag{3.5}$$

Используя известные результаты из теории вероятностей, находится математическое ожидание искомого вектора $\overline{I}$ в виде

$$M(\overline{I})=(\tilde{U}*C\tilde{U}+\alpha E)^{-1}\tilde{U}*C\overline{F}_0, \tag{3.6}$$

где i =1, 2, … N, E – единичный оператор.

Среднеквадратичная ошибка $\delta\,I_i$ определяется диагональным элементом соотношения

$$\delta\,I_i=\sqrt{(\tilde{U}*C\tilde{U}+\alpha E)_{ii}^{-1}}\,. \tag{3.7}$$

Отклонение реализуемой ДН от заданной $\overline{F}_0$ в каждом из фиксированных направлений $\overline{r}_m^0$

$$\delta\,\overline{F}_0(\overline{r}_m^0)=\delta\,U(\overline{I}+\delta\overline{I})+U\delta\,\overline{I},\qquad (\delta\,F_p)_m=\sum_n\delta\,\dot{F}_{mn}\dot{I}_n+\sum_n\delta\,\dot{F}_{mn}\delta\,I_n+\sum_n\dot{F}_{mn}\delta\,\dot{I}_n\,. \tag{3.8}$$

Ошибками $\delta\,I_i$ определяются технические допуски на изготовление излучателей, а суммирование $\left|\delta\,F_{pm}\right|^2$ определяет величину Δ^2 среднеквадратичной погрешности воспроизведения требуемой диаграммы направленности.

Оптимальная статистическая регуляризация решения задачи синтеза антенн без ограничений на решение. Из соотношения (3.6) следует, что решение задачи синтеза может быть представлено в спектральной форме:

$$\overline{I}_\alpha=\sum_{n=1}^{N}\frac{(\tilde{U}*\overline{F}_0)_n}{\lambda_n+\alpha_n}\overline{g}_n\,, \tag{3.9}$$

$\tilde{U}*$ – оператор, сопряженный прямому оператору, известен приближенно, как и $\tilde{U}$; λ_n – собственные значения оператора $\tilde{U}*\tilde{U}$; $\overline{g}_n$ – собственные векторы оператора $\tilde{U}*\tilde{U}$; α_n – параметр регуляризации по каждой из собственных гармоник.

Решение вида (3.9) позволяет ставить задачу наилучшего среднеквадратичного приближения решения $\overline{I}_\alpha$ к решению, если бы задача решалась с точно заданным оператором, что эквивалентно минимизации математического ожидания величины

$$M\left(\left\|\overline{I}_\alpha-\overline{I}\right\|^2\right)\to\min, \qquad (3.10)$$

где $\overline{I}=\sum_{n=1}^{N}\frac{(U^*\overline{F}_0)_n}{\lambda_n}\overline{g}_n$ – точное решение, U^* – точный оператор.

Оптимальные параметры λ_n^0 находятся из условия $(\partial T(\lambda)/\partial\lambda)=0$ и являются корнями кубического уравнения [3]:

$$\lambda_n^3 f_n^2+\alpha_n^2\lambda_n\left[2f_n^2-\beta_n^2-\gamma_n^2 f_n^2\right]+\alpha_n\left[\lambda_n^2\left(f_n^2-2\beta_n^2\right)+3\sigma_n^2 f_n^2-2\gamma_n^2\lambda_n^2+3f_n^2\lambda_n r_n\right]-$$
$$-\lambda_n\left[\lambda_n^2\beta_n^2+3f_n^2\sigma_n^2+\gamma_n^2 f_n^2\lambda_n^2-3f_n^2\lambda_n r_n\right]=0, \qquad (3.11)$$

где $f_n=(\overline{U}^*\overline{F})_n$; $\beta_n^2=M(\delta f_n)^2$; $\sigma_n^2=M(\delta\lambda_n)^2$; $\gamma_n^2=\sum_k M(\Delta\xi_{kn})^2$; $\Delta\xi_{kn}$ – погрешности составляющих собственного вектора $\tilde{U}^*\tilde{U}$, $\Delta g_n=\sum_k\Delta\xi_{kn}g_k$.

Оптимальный параметр α_n^0 в этом случае может быть взят [5] равным

$$\alpha_n^0=\lambda_n\left(\frac{\beta_n^2}{f_n^2}+3\frac{\sigma_n^2}{\lambda_n^2}-3\frac{r_n}{\lambda_n}+\gamma_n^2\right). \qquad (3.12)$$

Оптимальная статистическая регуляризация решения задачи синтеза с ограничением на норму решения. Минимизацию функционала (3.10) рассмотрим при ограничении нормы решения

$$\left\|\overline{I}\right\|^2\le R^2. \qquad (3.13)$$

Выражение для математического ожидания нормы $\left\|\overline{I}\right\|^2$, $M(\alpha)=M\left(\left\|\overline{I}\right\|^2\right)=\sum_{n=1}^{N}M_n(\alpha_n)$, где

$$M_n(\alpha_n)=\frac{f_n^2+\beta_n^2}{(\lambda_n+\alpha_n)^2}+\frac{3\sigma_n^2 f_n^2}{(\lambda_n+\alpha_n)^4}+\frac{\gamma_n^2 f_n^2}{(\lambda_n+\alpha_n)^2}-\frac{2r_n f_n^2}{(\lambda_n+\alpha_n)^3}. \qquad (3.14)$$

Для регуляризированного решения уравнения (3.2) в неравенстве (3.13) знак заменяется на равенство. Тогда задача минимизации функционала (3.10) идет при ограничении (3.13) вида

$$M(\alpha)=\sum_n M_n(\alpha_n)=R^2. \qquad (3.15)$$

Применяя метод множителей Лагранжа, находим минимум функционала

$$\Phi(\alpha)=T(\alpha)+tM(\alpha). \qquad (3.16)$$

Из условий $\partial\Phi(\alpha)/\partial\alpha_n=0$, $n=1,2,\ldots$ вытекает, что параметры регуляризации α_n для решения задачи с ограничением являются корнями следующих кубических уравнений:

$$\lambda_n^3 f_n^2+\alpha_n^2\lambda_n\left[2f_n^2-\beta_n^2-\gamma_n^2 f_n^2-tf_n^2-t\beta_n^2-t\gamma_n^2 f_n^2\right]+\alpha_n\left[\lambda_n^2 f_n^2-2\beta_n^2\lambda_n^2+3\sigma_n^2 f_n^2-2\gamma_n^2\lambda_n^2 f_n^2+\right.$$
$$\left.+3f_n^2\lambda_n r_n-2tf_n^2\lambda_n^2-2t\beta_n^2\lambda_n^2-2t\gamma_n^2 f_n^2\lambda_n^2+3tf_n^2\lambda_n r_n\right]-\lambda_n\left(\beta_n^2\lambda_n^2+3\sigma_n^2 f_n^2+\gamma_n^2\lambda_n^2 f_n^2-3f_n^2\lambda_n r_n+\right.$$
$$\left.+tf_n^2\lambda_n^2+t\beta_n^2\lambda_n^2+t\gamma_n^2 f_n^2\lambda_n^2-3tf_n^2\lambda_n r_n+6t\sigma_n^2 f_n^2\right)=0. \qquad (3.17)$$

При $t=0$ уравнение (3.16) превращается в (3.11), что соответствует частному случаю решения (3.9) без ограничения.

Помимо уравнений (3.17) параметры регуляризации задачи с ограничением удовлетворяют также соотношению

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{f_n^2+\beta_n^2+\gamma_n^2 f_n^2}{(\lambda_n+\alpha_n)^2}+\frac{3\sigma_n^2 f_n^2}{(\lambda_n+\alpha_n)^4}-\frac{2r_n f_n^2}{(\lambda_n+\alpha_n)^3}\right)=R^2. \tag{3.18}$$

В работе [6] показано, что для вычисления параметров регуляризации α_n в задаче с ограничением справедливы приближенные формулы

$$\alpha_n \cong \lambda_n\left(\frac{\beta_n^2}{f_n^2}+3\frac{\sigma_n^2}{\lambda_n^2}+\gamma_n^2-3\frac{r_n}{\lambda_n}+t\right), \tag{3.19}$$

где $t>0$ находится из соотношения

$$\sum_{n=1}^{N} f_n^2\left[\lambda_n^2\left(1+\frac{\beta_n^2}{\lambda_n^2}+\gamma_n^2+3\frac{\sigma_n^2}{\lambda_n^2}-3\frac{r_n}{\lambda_n}+t\right)^2\right]^{-1}=R^2. \tag{3.20}$$

- Таким образом, регуляризированные решения уравнения (2.2) имеют вид (3.9), в котором параметры регуляризации α_n берутся в виде (3.19).

Литература

1. *Мизгайлов В.Н.* Самолетная радиоголографическая антенна для связи через ИСЗ. // Доклады Международного семинара «Бортовое электронное оборудование и системы летательных аппаратов», 12–13 августа 1992 г., Россия, Моск. обл. г. Жуковский, с. 46.
2. *Дымский В.Н.* Об одном приближенном методе синтеза антенн. // Труды Казанского авиационного института, 1964, вып. 85, с.11 – 24.
3. *Бахрах Л.Д., Кременецкий С.Д.* Синтез излучающих систем: Теория и методы расчета. – М.: Сов. радио, 1974.
4. *Савелова Т.И.* Об оптимальной регуляризации операторных уравнений с погрешностями в задании оператора и правой части. – Вычислит. мат. и мат. физ., 1977, т. 7, № 6, с.1579–1583.
5. *Мигзгайлов В.Н., Мухин В.В., Романов В.А.* Об оптимальной статистической регуляризации операторных уравнений с ограничением на норму решения. – Вычислит. мат. и мат. физ., 1979, № 4, с. 1036–1040.

Поступила 16 июля 2008 г.

OPTIMUM CONSTRUCTIVE SINTHESIS OF RADIATIONS SISTEMS, INCLUDING RADIOHOLOGRAPHIC

V.N. Mizgaylov

The optimum algorithms of problem solving of synthesis of radiating systems of any nature according to a given directional pattern are considered upon construction of the operators of the problem experimentally, and technical restrictions are imposed on the solutions. The problems of practical synthesis are considered as incorrect problems of mathematical physics. The estimates are given of the synthesis problem solution. Particularly, the synthesis problems are considered by a spectral method but in a random statement. In addition an optimal statistical regularization has been performed of the synthesis problem solution with and without a limitation.